А.К. ЕГОРОВ, М.А. БАЙМУХАМЕТОВ

СВОБОДНЫЕ СФЕРОИДАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГОЙ ОДНОРОДНОЙ ДИЛАТАЦИОННОЙ МОДЕЛИ ЗЕМЛИ

(Представлена академиком НАН РК Б.Р. Ракишевым)

Исследованы свободные сфероидальные колебания упругой однородной дилатационной модели Земли, для которой относительное объёмное расширение не равно нулю. При этом решается обратная задача, суть которой заключается в том, что по наблюдаемому с помощью геофизических приборов значению доминантного периода колебаний основного тона определяются значения физических параметров модели Земли, обеспечивающие это значение периода. Расчётами показано, что реальные частота или период свободных колебаний однородной модели Земли достигаются при данных, соответствующих глубине в пределах оболочки Земли, для неоднородной её модели.

Ранее нами были исследованы свободные сфероидальные колебания упругой однородной бездилатационной модели Земли, то есть модели Земли, материал которой был представлен упругим несжимаемым телом. Дилатация (относительное объёмное расширение) при этом предполагалась равной нулю [1]. Однако эта модель является приближённой к реальной Земле, материал которой является упругим сжимаемым телом. В настоящей работе мы исходим из более точной дилатационной модели Земли, для которой дилатация или относительное объёмное расширение не равно нулю. При этом мы решаем обратную задачу, суть которой заключается в том, что по наблюдаемому с помощью геофизических приборов значению доминантного периода ко-

лебаний основного тона при $n = 2$ [2] мы определяем значения физических параметров модели Земли, обеспечивающие это значение периода.

Итак, в случае сфероидальных колебаний система дифференциальных уравнений для возмущений перемещений в сферической системе координат имеет следующий вид [3]:

$$(\nabla_0^2 + 2)u_1 + r^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + 4r\frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{\rho r^2 f^2}{G}u_1 = (2r - \frac{r^2}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial r})\Theta, \quad (1)$$

$$r^2\frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2} + 2r\frac{\partial u_2}{\partial r} + \frac{\rho r^2 f^2}{G}u_2 = -2r\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\frac{1-\nu}{1-2\nu} + r\frac{\partial^2 u_1}{\partial r\partial\theta}, \quad (2)$$

$$r^2\frac{\partial^2 u_3}{\partial r^2} + 2r\frac{\partial u_3}{\partial r} + \frac{\rho r^2 f^2}{G}u_3 = -2r\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\Theta}{\partial\lambda}\frac{1-\nu}{1-2\nu} + \frac{r}{\sin\theta}\frac{\partial^2 u_1}{\partial r\partial\lambda}, \quad (3)$$

где

$$\nabla_0^2 = \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + ctg\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} \quad (4)$$

– оператор Бельтрами [4]; f – частота свободных колебаний, Θ – дилатация, ρ – плотность материала, G – модуль сдвига, ν – коэффициент Пуассона.

Дилатация подчиняется уравнению Гельмгольца [5], следующему из уравнений (1) – (3):

$$\nabla^2\Theta + \frac{\rho}{2G}\frac{1-2\nu}{1-\nu}f^2\Theta = 0, \quad (5)$$

где ∇^2 – оператор Лапласа, причём

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\nabla_0^2. \quad (6)$$

Для сферической функции имеет место тождество:

$$\nabla_0^2 P_n^m(\cos\theta)\cos m\lambda = -n(n+1)P_n^m(\cos\theta)\cos m\lambda. \quad (7)$$

Произведём разделение переменных по формулам:

радиальная компонента вектора перемещений имеет вид –

$$u_1(t,r,\theta,\lambda) = \exp(ift)\sum_{m=0}^{\infty}u_{10m}(r)\mathrm{P}_n^m(\cos\theta)\cos m\lambda, \quad (8)$$

перемещение в направлении меридиана –

$$u_2(t,r,\theta,\lambda) = \exp(ift)\sum_{m=0}^{\infty}u_{20m}(r)\frac{d\mathrm{P}_n^m(\cos\theta)}{d\theta}\cos m\lambda, \quad (9)$$

перемещение в долготном направлении –

$$u_3(t,r,\theta,\lambda) = \exp(ift)\sum_{m=0}^{\infty}u_{30m}(r)\frac{\mathrm{P}_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta}\sin m\lambda. \quad (10)$$

Дилатация

$$\Theta(t,r,\theta,\lambda) = \exp(ift)\sum_{m=0}^{\infty}\Theta_{0m}(r)\mathrm{P}_n^m(\cos\theta)\cos m\lambda. \quad (11)$$

Здесь i – мнимая единица; f – частота свободных колебаний точек упругой однородной модели Земли; t – время.

Сведём систему дифференциальных уравнений в частных производных (1) – (3), (5) с учётом (6) – (11) к системе обыкновенных неоднородных (Θ находим из однородного уравнения (5)) дифференциальных уравнений с регулярной особой точкой $r = 0$, решаемых в обобщённых степенных рядах и методом неопределённых коэффициентов.

Уравнение (1) сводится к уравнению (индекс m опускаем):

$$r^2\frac{d^2u_{10}(r)}{dr^2} + 4r\frac{du_{10}(r)}{dr} + [2 - n(n+1) + \frac{\rho r^2 f^2}{G}]u_{10}(r) = 2r\Theta_0(r) - \frac{r^2}{1-2\nu}\frac{d\Theta(r)}{dr}; \quad (12)$$

уравнение (2) –

$$r^2\frac{d^2u_{20}(r)}{dr^2} + 2r\frac{du_{20}(r)}{dr} + \frac{\rho r^2 f^2}{G}u_{20}(r) = r[\frac{du_{10}(r)}{dr} - 2\Theta_0(r)\frac{1-\nu}{1-2\nu}]; \quad (13)$$

уравнение (3) –

$$r^2\frac{d^2u_{30}(r)}{dr^2} + 2r\frac{du_{30}(r)}{dr} + \frac{\rho r^2 f^2}{G}u_{30}(r) = -mr[\frac{du_{10}(r)}{dr} - 2\Theta_0(r)\frac{1-\nu}{1-2\nu}]; \quad (14)$$

уравнение (5) –

$$r^2\frac{d^2\Theta_0(r)}{dr^2} + 2r\frac{d\Theta_0(r)}{dr} + \Theta_0(r)[\frac{\rho}{2G}\frac{1-2\nu}{1-\nu}r^2 f^2 - n(n+1)] = 0. \quad (15)$$

Уравнение (15) есть обыкновенное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с регулярной особой точкой $r = 0$, которое можно решить с помощью обобщённого степенного ряда в виде [5]:

$$\Theta_0(r) = r^s \sum_{s=0}^{\infty} \alpha_s r_s, \qquad (16)$$

где α_s подлежит определению. Поскольку величину $\Theta_0(r)$ можно найти, она будет уже известной функцией. Поэтому уравнение (12) относительно $u_{10}(r)$ можно считать неоднородным и применить к нему метод решения неоднородного уравнения, согласно которого общее решение неоднородного уравнения представляет собой сумму общего решения соответствующего однородного уравнения без правой части и какого-либо частного решения неоднородного с правой частью.

Поскольку $u_{10}(r)$ таким образом также может быть найдено, то в уравнениях (13) и (14) правые части с учётом уже найденных $u_{10}(r)$ и $\Theta_0(r)$ представляют известные функции и для решения этих уравнений также можно применить метод решения неоднородных уравнений.

Таким образом, можно получить решения указанных выше уравнений и найти перемещения, по соотношениям Коши – деформации и обобщённому закону Гука – напряжения при свободных колебаниях точек модели Земли из сжимаемого материала с не равной нулю дилатацией.

Запишем найденные нами решения уравнений (12)–(15) для доминантной моды $n = 2$ в следующем виде:

$$u_{10}(r) = C_1(U_{10})_1 + C_2(U_{10})_2 + C_3(U_{10})_3, \qquad (17)$$

где

$$(U_{10})_1 = r - \frac{f^2 r^3}{14\beta^2} + \frac{f^4 r^5}{504\beta^4} - \frac{f^6 r^7}{33264\beta^6} + \frac{f^8 r^9}{3459456\beta^8} - \frac{f^{10} r^{11}}{518918400\beta^{10}} + \ldots, \qquad (18)$$

$$(U_{10})_2 = -\frac{2\nu}{7} r^3 + \frac{f^2[(1+2\nu)\beta^2 + 2\nu\alpha^2]r^5}{252\alpha^2\beta^2} - \frac{f^4[2\beta^4(1+\nu) + (1+2\nu)\alpha^2\beta^2 + 2\nu\alpha^4]r^7}{16632\alpha^4\beta^4} + \frac{f^6[(3+2\nu)\beta^6 + 2\alpha^2\beta^4(1+\nu) + (1+2\nu)\alpha^4\beta^2 + 2\nu\alpha^6]r^9}{1729728\alpha^6\beta^6} - \ldots, \qquad (19)$$

$$(U_{10})_3 = 0; \qquad (20)$$

C_1, C_2, C_3 – произвольные постоянные интегрирования;

$$\alpha = \sqrt{\frac{2G(1-\nu)}{\rho(1-2\nu)}} \qquad (21)$$

– скорость продольных волн,

$$\beta = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \qquad (22)$$

– скорость поперечных волн [2];
величина

$$u_{20}(r) = C_1(U_{20})_1 + C_2(U_{20})_2 + C_3(U_{20})_3, \qquad (23)$$

где

$$(U_{20})_1 = 0{,}5r - \frac{5f^2 r^3}{84\beta^2} + \frac{f^4 r^5}{432\beta^4} - \frac{f^6 r^7}{22176\beta^6} + \frac{f^8 r^9}{1886976\beta^8} - \frac{f^{10} r^{11}}{239500800\beta^{10}} + \ldots, \qquad (24)$$

$$(U_{20})_2 = -\frac{7-4\nu}{42} r^3 + \frac{f^2 r^5[\alpha^2(42-14\nu) + \beta^2(41-16\nu)]}{7560\alpha^2\beta^2} - \frac{f^4 r^7[\alpha^4(462-84\nu) + \alpha^2\beta^2(486-416\nu) + 20\beta^4(20-13\nu)]}{4656960\alpha^4\beta^4} + \frac{f^6 r^9}{419545526400\alpha^6\beta^6} \times [2695(107-102\nu)\beta^6 + 70\alpha^2\beta^4(4939-4499\nu) + 63(6589-5698\nu)\alpha^4\beta^2 + 294(1573-1221\nu)\alpha^6] - \ldots, \qquad (25)$$

$$(U_{20})_3 = 1 - \frac{f^2 r^2}{6\beta^2} + \frac{f^4 r^4}{120\beta^4} - \frac{f^6 r^6}{5040\beta^6} + \frac{f^8 r^8}{362880\beta^8} - \frac{f^{10} r^{10}}{39916800\beta^{10}} + \ldots, \qquad (26)$$

$$u_{30}(r) = u_{20}(r). \qquad (27)$$

Величина

$$\Theta_0(r) = C_2(1-2\nu)(r^2 - \frac{f^2 r^4}{14\alpha^2} + \frac{f^4 r^6}{504\alpha^4} - \frac{f^6 r^8}{33264\alpha^6} + \frac{f^8 r^{10}}{3459456\alpha^8} - \frac{f^{10} r^{12}}{518918400\alpha^{10}} + \ldots) = C_2(\Theta_0)_2. \qquad (28)$$

Граничные условия при свободных колебаниях модели Земли:

$$\sigma_{11} + \rho g u_1 = 0,\ \sigma_{12} = \sigma_{13} = 0 \text{ при } r = r_0, \quad (29)$$

где r_0 – радиус Земли, σ_{11}, σ_{12}, σ_{13} – напряжения, причём по обобщённому закону Гука

$$\sigma_{11} = 2G(\frac{\nu}{1-2\nu}\Theta + \varepsilon_{11}),\ \sigma_{12} = 2G\varepsilon_{12},\ \sigma_{13} = 2G\varepsilon_{13}, \quad (30)$$

g – ускорение силы тяжести.

Здесь ε_{11}, ε_{12}, ε_{13} – компоненты тензора деформации, определяемые по соотношениям Коши:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial r},\ \varepsilon_{12} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_2}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_1}{\partial \theta} - \frac{u_2}{r}),$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{1}{2}(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_1}{\partial \lambda} + \frac{\partial u_3}{\partial r} - \frac{u_3}{r}). \quad (31)$$

Мы получили решения для $u_{10}(r), u_{20}(r) = u_{30}(r), \Theta_0(r)$, содержащие три произвольных постоянных интегрирования C_1, C_2, C_3. Условий же, связывающих эти произвольные постоянные, как это следует из граничных условий (29) с учётом того, что $u_{30}(r) = u_{20}(r)$, два. Чтобы замкнуть систему, необходимо добавить ещё третье условие, следующее из выражения для дилатации:

$$\Theta = \frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{2u_1}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_2}{\partial \theta} + \frac{u_2}{r}ctg\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_3}{\partial \lambda}, \quad (32)$$

а именно

$$\Theta_0(r) = \frac{du_{10}(r)}{dr} + \frac{2}{r}u_{10}(r) - \frac{6}{r}u_{20}(r). \quad (33)$$

Здесь использовано тождество (7) при $n = 2$.

Разделение переменных по формулам (8)–(11) в граничных условиях (29) с учётом (30), (31) приводит к следующим соотношениям:

$$2G[\frac{\nu}{1-2\nu}\Theta_0 + \frac{du_{10}(r)}{dr}] + \rho g u_{10} = 0, \quad (34)$$

$$\frac{du_{20}(r)}{dr} + \frac{u_{10}(r) - u_{20}(r)}{r} = 0, \quad (35)$$

$$u_{20}(r) = u_{30}(r), \text{ при } r = r_0. \quad (36)$$

Эти граничные условия с учётом (33), а также выражений (17)–(28), позволяют получить систему линейных однородных алгебраических уравнений относительно неизвестных – произвольных постоянных интегрирования C_1, C_2, C_3:

$$a_{11}C_1 + a_{12}C_2 + a_{13}C_3 = 0,$$

$$a_{21}C_1 + a_{22}C_2 + a_{23}C_3 = 0, \quad (37)$$

$$a_{31}C_1 + a_{32}C_2 + a_{33}C_3 = 0,$$

где

$$a_{11} = 2G\frac{d(U_{10})_1}{dr} + \rho g(U_{10})_1,$$

$$a_{12} = 2G[\frac{\nu}{1-2\nu}(\Theta_0)_2 + \frac{d(U_{10})_2}{dr}] + \rho g(U_{10})_2,$$

$$a_{13} = 2G\frac{d(U_{10})_3}{dr} + \rho g(U_{10})_3,$$

$$a_{21} = \frac{d(U_{20})_1}{dr} + \frac{(U_{10})_1 - (U_{20})_1}{r_0},$$

$$a_{22} = \frac{d(U_{20})_2}{dr} + \frac{(U_{10})_1 - (U_{20})_1}{r_0},$$

$$a_{23} = \frac{d(U_{20})_3}{dr} + \frac{(U_{10})_3 - (U_{20})_3}{r_0},$$

$$a_{31} = \frac{d(U_{10})_1}{dr} + \frac{2}{r_0}(U_{10})_1 - \frac{6}{r_0}(U_{20})_1,$$

$$a_{32} = \frac{d(U_{10})_2}{dr} + \frac{2}{r_0}(U_{10})_2 - \frac{6}{r_0}(U_{20})_2 - (\Theta_0)_2,$$

$$a_{33} = \frac{d(U_{10})_3}{dr} + \frac{2}{r_0}(U_{10})_3 - \frac{6}{r_0}(U_{20})_3, \text{ при } r = r_0. \quad (38)$$

Нетривиальное (ненулевое) решение алгебраической системы линейных однородных уравнений (37) будет иметь место при равенстве нулю её определителя [6], называемого характеристическим:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0. \quad (39)$$

Уравнение (39) относительно частоты f называется характеристическим.

По заданным значениям физических и геометрических параметров Земли из уравнения (39) можно определить частоты или периоды свободных колебаний рассматриваемой упругой однородной дилатационной модели Земли. Но дело в том, что для однородной модели эти значения параметров неопределённы. Можно пойти обратным путём, задав реальные частоту или период свободных колебаний, наблюдаемые с помощью геофизических приборов, и определить указанную

Таблица 1. **Значения физических величин на различной глубине для оболочки Земли**

Зона	Глубина h (км)	Плотность ρ (г/см^3)	$G/10^{12}$ (дин/см^2)	ν	g (см/сек^2)
	33	3,32	0,63	0,269	985
	100	3,38	0,67	0,272	989
B	200	3,47	0,74	0,275	992
	300	3,55	0,81	0,277	995
	413	3,64	0,90	0,280	998

совокупность значений параметров, обеспечивающих эти частоту или период. Например, согласно модели А Буллена [2], указанная совокупность значений параметров закономерно меняется с глубиной. Поэтому можно определить, на какой глубине эта совокупность значений параметров обеспечивает заданные реальные частоту или период, то есть обеспечивает удовлетворение характеристического уравнения (39).

Группа Юинга получила усреднённые результаты группы Беньоффа-Пресса, группы Слихтера и Богерта для различных приборов и различных компонентов смещений почвы [2]. Для доминантной моды $n = 2$ основного тона получено значение периода свободных колебаний $T = 53{,}4$ *минуты*, что отвечает частоте

$$f = \frac{2\pi}{T} = \frac{2 \cdot 3{,}14}{53{,}4 \cdot 60} = 0{,}001960049938 Гц .$$

Расчёты проведены на компьютере с использованием системы «Maple 14» при $r_0 = 6{,}371 \cdot 10^8 см$ и данных, взятых из таблиц 3,4 книги К.Е.Буллена [2] для его модели А и приведённых ниже в таблице 1.

Расчётами показано, что реальные частота или период свободных колебаний однородной модели Земли достигаются при данных:

$$\rho = 3{,}5373416 \frac{г}{см^3}, \; G = 7{,}989239 \cdot 10^{11} \frac{дин}{см^2},$$

$$\nu = 0{,}27668354, \; g = 994{,}52531 \frac{см}{сек^2},$$

отвечающих глубине $h = 284{,}177 км$ для неоднородной модели А Буллена, то есть в пределах оболочки Земли в зоне В.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Егоров А.К., Ершибаев У.Д.* Определение частот свободных сфероидальных колебаний однородной модели Земли // Вестник КазНУ, сер. математика, механика, информатика, № 1 (40), 2004. С. 52-56.

2. *Буллен К.Е.* Введение в теоретическую сейсмологию. М., «Мир». 1966. 460 с.

3. *Егоров А.К., Ершибаев У.Д., Баймухаметов А.А., Надырмагамбетов С.Т.* Георезонансы как триггерный механизм для землетрясений // Геомеханика в горном деле. Доклады международной конференции 5-8 июля 2005 г. Екатеринбург, 2005. С. 294-302.

4. *Власов В.Э.* Избранные труды. М., 1962. 528 с.

5. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. М.; Л., 1952. Т. 2. 627 с.

6. *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры. М., 1975. 431 с.

Резюме

Серпінді біртекті дилатационды жер үлгісіне қатысты көлемінің өсуі нөлге тең емес деп қарастырылып, серпінді біртекті дилатационды жер үлгісінің еркін сфероидальды теңселулері зерттелді. Доминантты теңселу кезең арқылы геофизикалық аспаптың көрсетуі бойынша, жер үлгісінің физикалық параметрлері жалпы тон арқылы анықталады және бақылау барысында кері есеп шешіліп, оның мағынасы ашылады. Көрсеткіштер бойынша анық жиілік немесе біртекті жердің еркін теңселулер кезеңі жердің терендік қабаты бойынша және оның біртекті емес үлгіне сәйкес келеді.

Summary

Free spheroidal fluctuations of elastic homogeneous dilation model of the Earth, for which relative expansion is not equal to zero, are investigated. Thus the reverse problem, the essence of which consists that on value of the dominant period of fluctuations of the basic tone observed by means of geophysical devices determine the values of physical parameters of the Earth model, providing this value of the period. It is shown by calculations that real frequency or the period of free fluctuations of homogeneous model of the Earth are reached at the data corresponding to the depth within the envelope of the Earth, for its non-uniform model.

Институт механики и машиноведения имени У.А. Джолдасбекова МОН РК г. Алматы

Поступила 24.11.2010 г.