

УДК 534: 539.3

К.К. ЕЛЕМЕСОВ

## О ЛИНЕАРИЗАЦИИ НЕЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ ВАЛА ИЗ РЕЗИНОКОРДНОГО МАТЕРИАЛА

Рассматривается линеаризация нелинейной модели крутильных колебаний вала из резинокордного материала. При этом полагается малость коэффициента  $\varepsilon$ , характеризуемого отношением радиуса сечения вала на его длину. Проведен сравнительный анализ линейных и нелинейных колебаний.

В работе [1] рассматривается динамика вращающихся стержневых элементов механизмов и машин из физически нелинейного материала. Крутильные колебания муфты из резинокордного материала описываются уравнением [2]:

$$G_0 J_p \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 4R G_0 J_p \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \rho J_p \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \xi_1 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2 \partial t} - \xi_2 \frac{\partial U}{\partial t} = F(x, t) \quad (1)$$

где

 $GJ$  - жесткость вала на кручение, $\rho J$  - момент инерции единицы вала, $\xi_1, \xi_2$  - коэффициенты, характеризующие внутреннее и внешнее трение, соответственно, $U(x, t)$  - угол скручивания в некотором сечении вала, $F(x, t)$  - интенсивность внешнего скручивающего момента, $R$  - радиус сечения вала.

Задаются следующие краевые и начальные условия:

$$\left. \begin{aligned} u(x=0, t) &= 0 \\ G_0 J_p \frac{\partial u}{\partial x} / x=1 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ - граничные условия; } (2a)$$

$$\left. \begin{aligned} u(x=l, t=0) &= \frac{\pi}{3} \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x=l, t=0) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ - начальные условия } (2b)$$

Динамическая модель (1) преобразована методом Бубнова-Галеркина к виду:

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + B_1 \frac{df}{dt} + B_2 f^2(t) + \omega_0^2 f(t) = 0, \quad (3)$$

где

$$A_1 = G_0 J_p \frac{\pi^2}{4l^2}; \quad A_2 = 4R G_0 J_p \frac{\pi^3}{8l^3}; \quad A_3 = \rho J_p;$$

$$A_4 = \xi_1 \frac{\pi^2}{4l^2}; \quad A_5 = \xi_2;$$

$$B_1 = \frac{A_4 + A_5}{A_3}; \quad B_2 = \frac{4}{3\pi} \frac{A_2}{A_3}; \quad \omega_0^2 = \frac{\pi^2 G_0}{4\rho l^2} \quad (4)$$

Для случая слабо нелинейных систем получено решение (3) во втором приближении асимптотическим методом разложения по малому параметру Боголюбова-Крылова [3-4]:

$$f = a \cos \varphi + B_2 \frac{a^2}{\omega_0^2} \left( \frac{1}{6} \cos 2\varphi - 1 \right), \quad (5)$$

$$a = \exp \left( -\frac{B_1 B_2 t}{2} \right),$$

$$\varphi = \left( \omega_0 - \frac{B_1^2 B_2^2}{8\omega_0} \right) t + \frac{11}{12} \frac{B_2}{\omega_0^3 B_1} \exp(-B_1 B_2 t) \quad (6)$$

Для общего случая нелинейной системы (3), когда коэффициент нелинейности не ограничивается малостью величины, проводится численный анализ (3) методом разностных схем. Для удобства вводится безразмерное время  $\tau = t \omega_0$ , где  $\omega_0$  - частота собственных колебаний линейной системы. Тогда колебания автономной системы в безразмерных параметрах задаются уравнением вида:

$$\frac{d^2 f}{d\tau^2} + k \frac{df}{d\tau} + \varepsilon f(\tau)^2 + f(\tau) = 0, \quad (7)$$

$$\text{где } \varepsilon = \frac{8R}{3l},$$

$$k = \frac{\pi^2 \xi_1 + 4l^2 \xi_2}{2\pi l J_p \sqrt{\rho G_0}}$$

Коэффициент нелинейности  $\varepsilon$  характеризуется величиной отношения радиуса сечения вала к его длине. Для случая слабо нелинейных систем получено решение модели (7) асимптотическим методом Боголюбова-Крылова и методом разностных схем (рис.1[1]). Расчеты проводились при следующих геометрических и физических параметрах системы:

$$R = 0,05 \text{ м}; \quad L = 0,75 \text{ м}; \quad G = 4 \cdot 10^5 \text{ н/м}^2;$$

$$\rho = 1,1 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3;$$

$$\xi_1 = 0,01 \text{ кг} \cdot \text{м}^3/\text{с}; \quad \xi_2 = 0,2 \text{ кг} \cdot \text{м}/\text{с}.$$

Как следует из графиков (рис.1), при решении уравнения движения обеими методами результаты исследований хорошо согласуются. Для случая увеличения коэффициента нелинейности  $\varepsilon$  в три раза наблюдается существенное расхождение результатов исследования (рис.2.[1]), т.е. применение асимптотического метода Боголюбова-Крылова к нелинейным системам дает погрешность в решении.

Целью данной работы является линеаризация динамической модели (1), а также количественная и качественная оценка влияния нелинейных факторов на динамику рассматриваемых объектов.

Исследован случай слабо нелинейных систем, для которых применение асимптотического метода Боголюбова-Крылова дает удовлетворительные результаты. На рисунке 3 представлены результаты аналитического решения для нелинейной модели (7) и ее линеаризованного случая при

$\varepsilon = \frac{8}{45}$ . Из графиков видно хорошее совпадение

результатов, т.е. слабая нелинейность системы практически не влияет на результат исследования. Для случая сильно нелинейных систем и их линеаризации рассмотрено численное решение (7) методом разностных схем (рис. 4).

Исследования показали, что с увеличением нелинейного параметра системы  $\varepsilon$  наблюдается увеличение амплитуды колебаний упругого элемента. Это объясняется зависимостью коэффициентом нелинейности  $\varepsilon$  от отношения радиуса вала  $R$  к его длине  $L$ , система претерпевает большие деформации. Из графиков на рисунке 4

видно, расхождение результатов исследования нелинейной модели с ее линеаризованным случаем. Самое большое отклонение амплитуды

наблюдается при значении, когда  $\varepsilon = \frac{8}{15}$ , т.е. нелинейность модели ведет к увеличению амплитуды колебаний. Таким образом, зная влияние параметров системы на колебательный процесс можно управлять последним, добиваясь при этом повышения надежности элементов машин и улучшения их рабочих характеристик

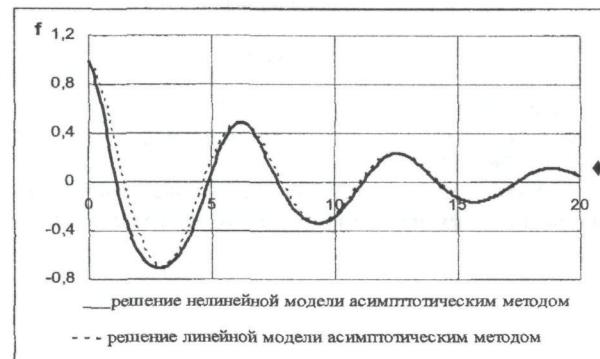


Рис.1. Сравнительный анализ решения системы асимптотическим методом и методом разностных схем.



Рис.2. Влияние коэффициента нелинейности на решение нелинейной системы (коэффициент нелинейности больше в 3 раза, чем на рис.1).

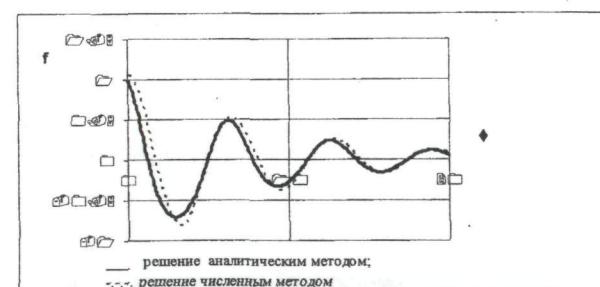


Рис.3. Сравнительный анализ решения нелинейной и линеаризованной модели резинокордной муфты для основного случая ( $R/L=8/45$ ).



Рис.4. Влияние степени нелинейности модели и ее линеаризация на ее численное решение.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Елемесов К.К., Хаджиеева Л.А. Анализ колебаний физически нелинейного стержневого элемента, Вестник Каз.НТУ, №6, 2006. С.141-145.
2. Хаджиеева Л.А. О моделировании динамики элементов машин из физически нелинейного материала// Сбор-

ник «Перспектива развития транспортной техники» Алматы, 2003, С. 170-174.

3. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.:Наука, 1974. 504 с.

4. Масанов Ж.К., Хаджиеева Л.А., Елемесов К.К. О колебаниях нелинейных систем с мягкими и жесткими характеристиками// Известиях НАН РК. 1.2005. С.62-70

#### Резюме

Резинекордты материалдан жасалған стержденді элементтің сыйыкты және сыйыктыемес тербелістерін көрастырылды. Бейсыйыкты модельде  $\epsilon$  өзгерісі арқылы женилдету. Асимптоталық әдістер арқылы сыйыкты және сыйыктыемес шешіндершін графиктер көрастырылған.

#### Summary

Linear and non- linear fluctuation of string element from rezinocord material is considered. Simplification of non- linear model due to the change of  $\epsilon$ . The diagram of salvation for linear and non- linear case is considered by the asymptotic method.