

Математическая физика

УДК 517.958+532.546

Т. К. ЕРМАГАМБЕТОВ

АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ МОДЕЛИ ФИЛЬТРАЦИИ С ОБОБЩЕННЫМ ЗАКОНОМ НЕРАВНОВЕСНОСТИ

Приведены формулы коэффициентов математической модели неравновесной фильтрации двух несмешивающихся неожиданных жидкостей и алгоритм численной реализации.

Вопросам классической теории фильтрации посвящено очень много работ [1-4].

В работах [5-7], исходя из физической сущности процесса фильтрации и анализа физических величин, предложена зависимость между истинной и эффективной насыщенностью. В работе [8] в качестве этого кинетического уравнения, связывающего эффективную насыщенность h с истинной насыщенностью S предлагается новое уравнение, частным случаем которого является кинетическое уравнение, предложенное в работе [8].

Рассмотрим математическую постановку задачи неравновесной фильтрации двух несмешивающихся жидкостей [8]

$$\bar{\tau} \nu m \frac{\partial \eta}{\partial t} = \bar{\tau} \operatorname{div} \left(K_0 a \nabla \eta + \vec{F} - b \vec{v} \right) + \\ + m(1-\nu) \left(s_0 e^{-\frac{1}{\bar{\tau}}t} - \eta + \frac{1}{\bar{\tau}} \int_0^t \eta e^{-\frac{1}{\bar{\tau}}(t-\xi)} d\xi \right); \quad (1)$$

$$\operatorname{div} [K \nabla p + \vec{f}] = 0; \quad (2)$$

$$\bar{\tau} \frac{\partial s}{\partial t} - \bar{\tau} \nu(x) \frac{\partial \eta}{\partial t} = \eta - s, \quad (3)$$

где s , η – истинная и эффективная насыщенность; p – давление; m – пористость; ν – степень неравновесности; k – проницаемость среды; k_1 , k_2 – фазовые проницаемости (воды и нефти); μ_1 , μ_2 – коэффициенты вязкости соответствующих фаз;

$\bar{\tau} = \frac{\tau}{\chi}$ – время замещения; $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ – скорость фильтраций.

Уравнения (1)-(3) рассматривались при следующих начальных и граничных условиях:

$$s = s_0, \eta = s, P_1 < p < P_0 \text{ при } t = 0;$$

$$\eta = f(x_2, t), p = P_1 \text{ при } x_1 = 0, 0 < x_2 < Y;$$

$$\eta = \operatorname{const}, \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \text{ при } 0 < x_1 < X, x_2 = 0, Y;$$

$$\eta = \operatorname{const}, p = P_0 \text{ при } x_1 = X, 0 < x_2 < Y. \quad (4)$$

Вектор функции $\vec{f}_0(x, \eta)$, $\vec{f}(x, \eta)$, $\vec{F}(x, \eta)$ определены с помощью приведенного давления и имеют следующий вид:

$$\vec{f}_0 = K_1 \int_{\eta}^1 \nabla \frac{\partial p_c}{\partial \eta} \cdot \frac{k_2}{k} d\xi; \quad (5)$$

$$\vec{f} = K \int_{\eta}^1 \nabla \frac{\partial p_c}{\partial \eta} \cdot \frac{k_2}{k} d\xi + K_2 \nabla p_c + K_2 (\rho_2 - \rho_1) \vec{g}; \quad (6)$$

$$\vec{F} = \vec{f}_0 - b \vec{f}. \quad (7)$$

где $p_c = \rho_2 - \rho_1$ – капиллярное давление;

$$\vec{g} = g \nabla h, \nabla p_c = \left(\frac{\partial p_c}{\partial x_1}, \frac{\partial p_c}{\partial x_2} \right), b = \frac{k_1}{k}.$$

Рассмотрено численное решение поставленной задачи (1)-(4) в котором значения \vec{F} определены с помощью формул (5)-(7).

Во всех вектор-функциях определенных формулой (5)-(7) присутствует интегральное выражение зависящее от насыщенности. Для численного нахождения значений интегралов использовался метод трапеции. Если рассмотреть отдельно интегральное выражение и расписать, как вектор-функцию, то интегральное выражение имеет следующий вид:

$$\lambda = \int_{\eta}^1 \nabla \frac{\partial p_e}{\partial \xi} \cdot \frac{k_{02}}{k} d\xi = \begin{cases} \lambda_1 = \int_{\eta}^1 \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial p_e}{\partial \xi} \right) \cdot \frac{k_{02}}{k} d\xi \\ \lambda_2 = \int_{\eta}^1 \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial p_e}{\partial \xi} \right) \cdot \frac{k_{02}}{k} d\xi \end{cases}$$

Для приближенного вычисления значения интеграла с помощью метода трапеций, подинтегральное выражение с использованием разностных формул приводится в следующий вид:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \int_{\eta}^1 \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial p_e}{\partial \xi} \right) \cdot \frac{k_{02}}{k} d\xi \approx \\ &\approx \sum_{m=0}^{n_1-1} \frac{h_\xi}{2} \left[\frac{1}{h_1} \left((p_{e,i+1,j})_\eta - (p_{e,i,j})_\eta \right) \times \right. \\ &\times \left(\frac{k_{02,i,j}(\eta + (m+1)h_\xi)}{k_{i,j}(\eta + (m+1)h_\xi)} + \frac{k_{02,i,j}(\eta + mh_\xi)}{k_{i,j}(\eta + mh_\xi)} \right); \\ \lambda_2 &= \int_{\eta}^1 \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial p_e}{\partial \xi} \right) \cdot \frac{k_{02}}{k} d\xi \approx \\ &\approx \sum_{m=0}^{n_2-1} \frac{h_\xi}{2} \left[\frac{1}{h_2} \left((p_{e,i,j+1})_\eta - (p_{e,i,j})_\eta \right) \times \right. \\ &\times \left(\frac{k_{02,j,j}(\eta + (m+1)h_\xi)}{k_{i,j}(\eta + (m+1)h_\xi)} + \frac{k_{02,j,j}(\eta + mh_\xi)}{k_{i,j}(\eta + mh_\xi)} \right), \end{aligned}$$

где $h_\xi = \frac{1-\eta}{n_\xi}$, h_1, h_2 – шаг сетки по пространственным переменным x_1, x_2 .

Разностные аналоги выражений (5)-(7) построены следующим образом:

$$\begin{aligned} f_{0,x,i,j} &= K_{1,i,j} \lambda_{1,j,j}; \quad f_{0,y,i,j} = K_{1,i,j} \lambda_{2,j,j}; \\ f_{x,i,j} &= K_{i,j} \lambda_{1,j,j} + K_{2,i,j} (p_{e,i,j})_x; \\ f_{y,i,j} &= K \lambda_{2,i,j} + K_{2,i,j} (p_{e,i,j})_y; \\ F_{x,i,j} &= f_{0,x,i,j} - b_{i,j} f_{x,i,j}; \\ F_{y,i,j} &= f_{0,y,i,j} - b_{i,j} f_{y,i,j}. \end{aligned}$$

Разностные схемы для уравнений (1)-(3) выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} d\eta^{n+1} &= m\nu\eta^n + \tau \left[K_0 a \Delta_h \eta_{i,j}^n + \operatorname{div}_h \vec{F} - b \operatorname{div}_h \vec{v} \right] + \\ &+ m(1-\nu) \frac{\tau}{\bar{\tau}} \left[s_0 e^{-\frac{1}{\bar{\tau}}t} + \frac{1}{\bar{\tau}} e^{\frac{(n+1)\tau}{\bar{\tau}}} \left(\gamma^n + \frac{\eta^n e^{\frac{n\tau}{\bar{\tau}}}}{2} - \tau \right) \right]; \end{aligned} \quad (8)$$

$$K_{i,j} \Delta p + \operatorname{div}_h \vec{f} = 0, \quad (9)$$

$$\text{где } d = \left(m\nu + m(1-\nu) \frac{\tau}{\bar{\tau}} \left[1 - \frac{\tau}{2\bar{\tau}} \right] \right).$$

Интеграл по времени в формуле (3) приближенно вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_0^t \eta \cdot e^{-\frac{1}{\bar{\tau}}(t-\xi)} d\xi &= e^{-\frac{1}{\bar{\tau}}t} \int_0^t \eta \cdot e^\xi d\xi; \\ \int_0^t \eta \cdot e^\xi d\xi \equiv \gamma^{n+1} &= \gamma^n + \frac{\eta^{n+1} e^{\frac{(n+1)\tau}{\bar{\tau}}} + \eta^n e^{\frac{n\tau}{\bar{\tau}}}}{2} \tau. \end{aligned} \quad (10)$$

Значения истинной насыщенности с учетом (10) вычисляются по формуле:

$$\begin{aligned} s_{i,j}^{n+1} &= (1-\nu_{i,j}) s_0 e^{-\frac{(n+1)\tau}{\bar{\tau}}} + \nu_{i,j} \eta_{i,j}^{n+1} + \\ &+ \frac{1}{\bar{\tau}} (1-\nu) e^{-\frac{(n+1)\tau}{\bar{\tau}}} \gamma_{i,j}^{n+1}. \end{aligned} \quad (11)$$

Данные разностные уравнения (8)-(11) решались при следующих граничных условиях:

$$\eta_{i,j}^0 = s_{i,j}^0 = \text{const}, \quad P_1 \leq p_{i,j}^0 \leq P_0,$$

$$\text{при } i=0, \quad i=\overline{1, n_1}, \quad j=\overline{1, n_2};$$

$$\eta_{1,j}^{n+1} = f(x_{2j}, t), \quad p_{1,j}^{n+1} = P_1$$

$$\text{при } i=1, \quad j=\overline{1, n_2};$$

$$\eta_{i,1}^{n+1} = \text{const}, \quad P_1 \leq p_{i,1}^{n+1} \leq P_0$$

$$\text{при } i=\overline{1, n_1}, \quad j=1; \quad (12)$$

$$\eta_{i,n_2}^{n+1} = \text{const}, \quad P_1 \leq p_{i,n_2}^{n+1} \leq P_0$$

$$\text{при } i=\overline{1, n_1}, \quad j=n_2;$$

$$\eta_{n_1,j}^{n+1} = \text{const}, \quad p_{n_1,j}^{n+1} = P_0$$

$$\text{при } i=n_1, \quad j=\overline{1, n_2}.$$

Согласно построенному алгоритму численной реализации, в первую очередь находятся значения давления из уравнения (9). Для численного решения использовался итерационный метод последовательной верхней релаксации и соответствующая расчетная формула примет вид:

$$P_{i,j}^{n+1} = \omega \left(\frac{h_2^2}{2(h_1^2 + h_2^2)} (P_{i+1,j}^n + P_{i-1,j}^n) + \right. \\ \left. + \frac{h_1^2}{2(h_1^2 + h_2^2)} (P_{i,j+1}^n + P_{i,j-1}^n) + \frac{h_1^2 h_2^2}{2(h_1^2 + h_2^2)} \phi_{i,j} \right) + \\ + (1-\omega) P_{i,j}^n,$$

где $\phi_{i,j} = f_{x_1 \bar{x}_1} + f_{x_2 \bar{x}_2}$, $1 \leq \omega < 2$.

Затем, с помощью вычисленных значений давления находились компоненты вектора скорости как градиент от нее

$$\begin{cases} u_{i,j} = -K_{i,j} \frac{P_{i+1,j} - P_{i,j}}{h_1}; \\ v_{i,j} = -K_{i,j} \frac{P_{i,j+1} - P_{i,j}}{h_2}. \end{cases}$$

Используя значения компонентов вектора скорости, находились значения эффективной насыщенности. Явная схема согласно (8) примет вид:

$$d\eta^{n+1} = \sigma \eta^n + \tau \left[K_0 a \Delta_h \eta_{i,j}^n + \operatorname{div}_{\vec{v}} \vec{F} - b \operatorname{div}_{\vec{v}} \vec{U} \right] + \\ + m(1-\nu) \frac{\tau}{\bar{\tau}} \left[s_0 e^{-\frac{1}{\bar{\tau}}} + \frac{1}{\bar{\tau}} e^{-\frac{(n+1)\tau}{\bar{\tau}}} \gamma^n \right],$$

$$\text{где } d = \left(m\nu + m(1-\nu) \frac{\tau}{\bar{\tau}} \left[1 - \frac{\tau}{2\bar{\tau}} \right] \right),$$

$$\sigma = m\nu + \frac{m(1-\nu)}{2} \left(\frac{\tau}{\bar{\tau}} \right)^2 e^{-\frac{\tau}{\bar{\tau}}}.$$

Последнюю очередь с помощью уравнения (11) пересчитывается истинная насыщенность

$$s_{i,j}^{n+1} = V_{i,j} \eta_{i,j}^{n+1} + (1-V_{i,j}) e^{-\frac{(n+1)\tau}{\bar{\tau}}} \left[s_0 + \frac{1}{\bar{\tau}} \gamma_{i,j}^{n+1} \right].$$

Для численной реализации выше приведенной математической модели неравновесной фильтрации двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей использовались следующие значения входных параметров: $s_0(x) = 0.01$; $k_1(\eta) = \eta^\alpha$;

$$k_2(\eta) = (1-\eta)^\beta; \quad k(\eta) = \eta^\alpha + (1-\eta)^\beta \quad \text{для} \\ \eta \in [0,1], \quad \alpha = 3, \quad \beta = 2; \quad m(x) = 0.2 \cdot (x_1 + x_2); \\ J(\eta) = 2000 \cdot (1-\eta)^5; \quad \bar{p}_c(x) = 0.01 \cdot (x_1 + x_2); \\ K_0(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad K = K_0 k, \quad K_i = K_0 k_i, \\ \bar{\tau}(x) = \frac{\tau}{\chi(x)} = 0.001; \quad \nu(x) = 0.1; 0.5; 0.9,$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Красные задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск: Наука, 1983. 319 с.
2. Жумагулов Б.Т., Смагулов Ш.С., Монахов В.Н., Зубов Н.В. Новые компьютерные технологии в нефтедобыче. Алматы: Фылым, 1996. 167 с.
3. Жумагулов Б.Т., Монахов В.Н. Гидродинамика нефтедобычи / ИА РК. Ин-т гидродин. им. М. А. Лаврентьева. Алматы: КазтогсИНИТИ, 2001. 336 с.
4. Жумагулов Б.Т., Монахов В.Н., Смагулов Ш.С. Компьютерное моделирование в процессах нефтедобычи. Алматы: Фылым, 2002. 308 с.
5. Баренблит Г.И. Фильтрация двух несмешивающихся жидкостей в однородной пористой среде / Численные методы механики сплошной среды. Т. 2, № 3. Новосибирск, 1971. С. 103-117.
6. Баренблит Г.И., Винченко А.П. Неравновесная фильтрация несмешивающихся жидкостей // Успехи механики. 1980. № 3. С. 35-50.
7. Баренблит Г.И., Гильман А.А. Математическая модель неравновесной противоточной капиллярной пропитки / ИФЖ. 1987. Т. 52, № 3. С. 456-461.
8. Габбасов М.Б. О неразрешимости одной задачи неравновесной неоднородной противоточной капиллярной фильтрации / Тезисы докладов научной конференции "Красные задачи и их спектральные вопросы для дифференциальных уравнений". Алма-Ата, 1991.

Резюме

Екі арааласпайтын сыйылмайтын сүйкіткіш кешігімлі сұзалаудың математикалық моделі коэффициенттерінің формуласы мен сандық шешімінің алгоритмі көлтіріледі.

Summary

In the given article formulas factor of mathematical model of a non-equilibrium filtration of the biphasic immiscible incompressible liquid and algorithm of numerical realization are brought.

Академический государственный
университет им. К. Жубанова

Поступила 24.02.10г.