Ш. Ш. ИБРАЕВ

3-КОГОМОЛОГИИ ПРОСТЫХ МОДУЛЕЙ ДЛЯ $Sp_4(k)$ В ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ

В работе полностью вычислены третья группы когомологии простых модулей простой односвязной алгебраической группы $Sp_4(k)$ над алгебраически замкнутым полем k характеристики $p > 5$.

Введение. Вычисление когомологии простых нетривиальных модулей алгебраических групп в положительной характеристике требует более детального изучения теорий когомологии их инфинитезимальных подгрупп. Кроме того, модули Вейля, играющие очень важное значение при описании простых модулей, имеют очень сложную структуру и мало изучены. Тем не менее, в последние годы наблюдается большой интерес к изучению когомологии простых модулей в положительной характеристике. Для некоторых малых алгебраических групп получены окончательные результаты о когомологии первой и второй степени. Первые группы когомологии простых модулей в положительной характеристике изучены в работах [1-3]. В работе [1] найдены все нетривиальные расширения двух простых модулей для простой односвязной группы $SL_2(k)$. Такой же результат был получен для $Sp_4(k)$ в работе [2]. Вторые группы когомологии простых модулей полностью описаны только для $SL_2(k)$ [4], $SL_3(k)$ [5] и $Sp_4(k)$ [5]. Результаты этих исследовании позволяют вычислить когомологии третьей степени простых модулей. Данная работа посвящена изучению когомологии третьей степени простых модулей для $Sp_4(k)$ над алгебраически замкнутым полем k характеристики $p > 5$. Нами найдены все простые $SL_3(k)$-модули с нетривиальными 3-когомологиями.

Пусть G – простая односвязная алгебраическая группа $Sp_4(k)$ над алгебраически замкнутым полем k характеристики $p > 5$. Будем считать, что G определена и расщепляется над простым подполем F_p поля k. Пусть $G_1 = Ker\ F$, где F – отображения Фробениуса на G. При доказательстве основного результата (теорема 3.1) мы используем спектральную последовательность Линдона-Хохшильда-Серра для $G_1 \lhd G$ [7] и ранее известные результаты о структуре индуцированных $Sp_4(k)$-модулей, о структурах первых, вторых групп когомологии простых модулей.

Все рассматриваемые в работе модули считаются конечномерными.

Работа выполнена при поддержке Государственной Программы фундаментальных исследований Ф.0508, выполняемой в институте Математики МОиН РК.

1. Обозначения и предварительные факты.

1.1. Обозначения. Пусть R – система корней группы G с максимальным коротким корнем $\alpha_0 = \alpha_1 + \alpha_2$ и $S = \{\alpha_1, \alpha_2\}$, $R_+ = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, 2\alpha_1 + \alpha_2\}$ – множества простых и положительных корней соответственно. Обозначим через B и T соответственно подгруппу Бореля и максимальный тор группы G. Действие группы Вейля W системы R на группу характера $X(T)$ максимального тора T определяется по формуле $S_\alpha(\lambda) = \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha$, где $s_\alpha \in W$, $\alpha \in R$ и $\alpha^\vee$ – дуальный к α корень. Точечное действие группы Вейля определяется через полусуммы всех положительных корней ρ по формуле $w \cdot \lambda = w(\lambda + \rho) - \rho$, где $w \in W$, $\lambda \in X(T)$.

Структура рационального G-модуля зависит от расположения его старших весов относительно альковов аффинной группы Вейля. Аффинная группа Вейля W_p порождается отражениями вида $s_{\alpha, np}$ для всех $\alpha \in R_+$ и $n \in Z$. Обычно используется точечное действие $s_{\alpha, np} \cdot \lambda = \lambda - \langle \lambda + \rho, \alpha^\vee \rangle \alpha + np\alpha$ аффинной группы Вейля.

Пусть $X_+(T) = \{\lambda \in X(T) \mid \langle \lambda + \rho, \alpha^\vee \rangle \geq 0 \text{ для всех } \alpha \in S\}$ – множество доминантных весов и $X_1(T) = \{\lambda \in X(T) \mid 0 \leq \langle \lambda + \rho, \alpha^\vee \rangle < p \text{ для всех } \alpha \in S\}$ – множество ограниченных весов.

Для любого $\lambda \in X(T)$ существует одномерный B-модуль k_λ и индуцированный G-модуль $H^0(\lambda) = Ind_B^G(k_\lambda)$. Известно, что $H^0(\lambda) \neq 0$ тогда и только тогда, если $\lambda \in X_+(T)$. Если $V(\lambda)$ – модуль Вейля со старшим весом λ, то $H^0(\lambda) \approx V(-w_0(\lambda))^*$ [7]. Пусть $L(\lambda)$ – простой G-модуль со старшим весом λ. Его можно определить через $H^0(\lambda)$ или через $V(\lambda)$. С одной стороны, он простой цоколь $H^0(\lambda)$ и, с другой стороны, единственный простой фактор-модуль $V(\lambda)$ по максимальному подмодулю. Все три G-модули, введенные выше, могут быть рассмотрены как G_1-модули, причем $L(\lambda)$ остается простым при переходе к G_1 [8].

Пусть L – рациональный G-модуль. Через $L^{(d)}$ обозначим кручение Фробениуса степени d для L. Тогда существует рациональный G-модуль V, такой что $V^{(d)} = L$, обозначим его через $V^{(-d)}$.

*1.2. **Предварительные факты.*** При доказательстве основной теоремы мы используем следующие известные факты.

1.2.1. Теорема Стейнберга о тензорном произведении. Для любого $\lambda = \lambda^0 + p\lambda^1 + \cdots + p^m\lambda^m \in X_+(T)$, где $\lambda^i \in X_1(T)$, простой G-модуль $L(\lambda)$ со старшим весом λ разлагается в виде следующего тензорного произведения

$$L(\lambda) = L(\lambda^0) \otimes L(\lambda^1)^{(1)} \otimes \cdots \otimes L(\lambda^m)^{(m)}. \tag{1.1}$$

1.2.2. Принцип связанности и структура индуцированных модулей. Пусть $\lambda, \mu \in X(T)$. Назовем λ *G_1-связанным (G-связанным) с μ*, если $\lambda \in W_p \cdot \mu + pX(T)$ ($\lambda \in W_p \cdot \mu$). Если $H^i(G_1, L(\lambda)) \neq 0$, то λ G_1-связан с нулем [7], II.9.19. Аналогично, если $H^i(G, L(\lambda)) \neq 0$, то λ G-связан с нулем [7], II.6.17.

Для $\lambda = a\lambda_1 + b\lambda_2 \in X(T)$, где λ_1, λ_2 – фундаментальные веса, мы будем использовать сокращенное обозначение (a,b). Согласно [6] $W_p \cdot 0 + pX(T) =$ $= \{(0,0),\ (p-2,1),\ (2,p-2),\ (p-4,1),\ (2,p-3),\ (p-4,0),\ (0,p-3),\ (p-2,p-2)\ \}$.

1.2.3. Когомологии простых модулей для G_1. Когомологии простых ограниченных модулей для G_1 полностью вычислены в работе [6]. Сформулируем необходимую нам информацию в виде следующих лемм.

Лемма 1.1. *Пусть $\lambda \in X_1(T)$ и $p > 3$. Тогда $H^1(G_1, L(\lambda)) = 0$, кроме следующих случаев:*

(i) $H^1(G_1, L(p-2,1)^{(-1)} \approx L(1,0)$;

(ii) $H^1(G_1, L(2,p-2))^{(-1)} \approx L(0,1)$;

(iii) $H^1(G_1, L(0,p-3))^{(-1)} \approx k$.

Лемма 1.2. *Пусть $\lambda \in X_1(T)$ и $p > 3$. Тогда $H^2(G_1, L(\lambda)) = 0$, кроме следующих случаев:*

(i) $H^2(G_1, L(0,0))^{(-1)} \approx L(2,0)$;

(ii) $H^2(G_1, L(p-4,1))^{(-1)} \approx L(1,0)$;

(iii) $H^2(G_1, L(2,p-3))^{(-1)} \approx L(0,1) \oplus k$;

(iv) $H^2(G_1, L(p-2,p-2))^{(-1)} \approx L(1,0)$.

Лемма 1.3. *Пусть $\lambda \in X_1(T)$ и $p > 3$. Тогда $H^3(G_1, L(\lambda)) = 0$, кроме следующих случаев:*

(i) $H^3(G_1, L(p-2,1))^{(-1)} \approx L(3,0) \oplus L(1,1) \oplus L(1,0)$;

(ii) $H^3(G_1, L(2,p-2))^{(-1)} \approx L(2,1) \oplus L(0,2) \oplus L(2,0) \oplus L(0,1) \oplus k$;

(iii) $H^3(G_1, L(p-4,0))^{(-1)} \approx L(1,0)$;

(iv) $H^3(G_1, L(0,p-3))^{(-1)} \approx L(0,1) \oplus L(2,0)$.

1.2.4. Расширения модулей для G. Все расширения двух простых модулей для G найдены в [2]. Для ограниченного веса $\mu \in X_1(T)$ введем на рассмотрение следующее множество простых G-модулей:

$$M_{Ext^1_G}(\mu) = \{L(\lambda) \mid \lambda \in X_+(T), Ext^1_G(L(\mu), L(\lambda)) \neq 0\}.$$

Лемма 1.4. *Пусть* $p > 3$. *Тогда*

$M_{Ext^1_G}(0,0) = \{L(0,p-3)^{(r)},\ L(2,p-2)^{(r)} \otimes L(0,1)^{(r+1)},\ L(p-2,1)^{(r)} \otimes L(1,0)^{(r+1)}, r \geq 0\}$;

$M_{Ext^1_G}(1,0) = \{L(1,p-4),\ L(p-3,2) \otimes L(1,0)^{(1)},\ L(3,p-2) \otimes L(0,1)^{(1)},\ L(1,0) \otimes L(0,p-3)^{(r+1)},$

$L(1,0) \otimes L(2,p-2)^{(r+1)} \otimes L(0,1)^{(r+2)},\ L(1,0) \otimes L(p-2,1)^{(r+1)} \otimes L(1,0)^{(r+2)}, r \geq 0\}$;

$M_{Ext^1_G}(0,1) = \{L(0,p-4),\ L(p-2,2) \otimes L(1,0)^{(1)},\ L(4,p-3) \otimes L(0,1)^{(1)},\ L(0,1) \otimes L(0,p-3)^{(r+1)},$

$L(0,1) \otimes L(2,p-2)^{(r+1)} \otimes L(0,1)^{(r+2)},\ L(0,1) \otimes L(p-2,1)^{(r+1)} \otimes L(1,0)^{(r+2)}, r \geq 0\}$;

$M_{Ext^1_G}(2,0) = \{L(2,p-5),\ L(4,p-2) \otimes L(0,1)^{(1)},\ L(p-4,3) \otimes L(1,0)^{(1)},\ L(2,0) \otimes L(0,p-3)^{(r+1)},$

$L(2,0) \otimes L(2,p-2)^{(r+1)} \otimes L(0,1)^{(r+2)},\ L(2,0) \otimes L(p-2,1)^{(r+1)} \otimes L(1,0)^{(r+2)}, r \geq 0\}$.

Во всех перечисленных случаях $Ext^1_G(L(\mu), L(\lambda)) \approx k$.

1.2.5. Вторые когомологии простых модулей для G. Все нетривиальные вторые когомологии простых модулей найдены в работе [6]. Для $\mu \in X_1(T)$ пусть

$$M^{nm}_{H^2_G} = \{L(\mu + p\gamma) \mid H^n(G, H^m(G_1, L(\mu + p\gamma)^{(-1)}) \neq 0, \gamma \in X_+(T)\}.$$

Лемма 1.5. *Пусть* $p > 5$. *Тогда*

(i) $M^{02}_{H^2_G}(0,0) = \{L(2,0)^{(1)}\}$;

$M^{02}_{H^2_G}(p-4,1) = \{L(p-4,1) \otimes L(1,0)^{(1)}\}$;

$M^{02}_{H^2_G}(2,p-3) = \{L(2,p-3), L(2,p-3) \otimes L(0,1)^{(1)}\}$;

$M^{02}_{H^2_G}(p-2,p-2) = \{L(p-2,p-2) \otimes L(1,0)^{(1)}\}$

$M^{11}_{H^2_G}(p-2,1) = \{L(p-2,1) \otimes L(\mu)^{(1)} \mid L(\mu) \in M_{Ext^1_G}(1,0)\}$;

$M^{11}_{H^2_G H^2_G}(2,p-2) = \{L(2,p-2) \otimes L(\mu)^{(1)} \mid L(\mu) \in M_{Ext^1_G}(0,1)\}$;

$M^{11}_{H^2_G}(0,p-3) = \{L(0,p-3) \otimes L(\mu)^{(1)} \mid L(\mu) \in M_{Ext^1_G}(0,0)\}$;

$M^{20}_{H^2_G}(0,0) = \{L(\mu)^{(1)} \mid H^2(G, L(\mu)) \neq 0\}$.

$$\text{(ii)}\ H^2(G,L(\lambda)) = \begin{cases} k, \text{если } L(\lambda) \in \bigcup\limits_{n+m=2} M^{nm}_{H^1_G}, \\ 0, \text{ в остальных случаях,} \end{cases}$$

где $M^{02}_{H^1_G} = M^{02}_{H^1_G}(0,0) \cup M^{11}_{H^1_G}(2,p-3) \cup M^{11}_{H^1_G}(p-4,1) \cup M^{11}_{H^1_G}(p-2,p-2)$,

$M^{11}_{H^1_G} = M^{11}_{H^1_G}(p-2,1) \cup M^{11}_{H^1_G}(2,p-2) \cup M^{11}_{H^1_G}(0,p-3)$,

$M^{20}_{H^1_G} = \{L(\mu)^{(d)} \mid L(\mu) \in M^{11}_{H^1_G} \cup M^{02}_{H^1_G}),\ d>0\}$.

1.2.6. Когомологии тензорных произведений.

Лемма 1.6. [7], II.4.13. *Если* $\lambda, \mu \in X_+(T)$, *то*

$$H^i(G, H^0(\lambda) \otimes H^0(\mu)) \approx \begin{cases} k, \text{ если } i=0 \text{ и } \lambda = -w_0(\mu), \\ 0, \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Лемма 1.7. [9]. *Пусть M и N – G-модули. Тогда G-модули* $H^i(G_1, M \otimes N^{(1)})$ *и* $H^i(G_1, M) \otimes N^{(1)}$ *изоморфны.*

2. Предварительные результаты.

В данном параграфе с помощью спектральной последовательности Линдона-Хохшильда-Серра вычисляется множество всех простых G-модулей с нетривиальной третьей когомологией. Сохраняем обозначение $M^{nm}_{H^{n+m}_G}(\mu)$ для $\mu \in X_1(T)$, введенное в пункте 1.2.5.

Для простого G-модуля $L(\lambda)$ спектральная последовательность Линдона-Хохшильда-Серра имеет вид [7], I.6.6.(3):

$$E_2^{nm} = H^n(G, H^m(G_1, L(\lambda))^{(-1)}) \Rightarrow H^{n+m}(G, L(\lambda)). \tag{2.1}$$

Если E_∞^{nm} – стабилизированное значение точек предыдущей спектральной последовательности, то

$$H^l(G, L(\lambda)) = \oplus_{n+m=l} E_\infty^{nm}. \tag{2.2}$$

Пусть $M^{nm}_{H^{n+m}_G} = \{L(\lambda) \mid E_2^{nm} \neq 0\}$, тогда из определения $M^{nm}_{H^{n+m}_G}(\mu)$ и (2.1) следует, что

$$M^{nm}_{H^{n+m}_G} = \bigcup_{\mu \in \{\gamma \in X_1(T) \mid H^m(G_1, L(\gamma))^{(-1)} \neq 0\}} M^{nm}_{H^{n+m}_G}(\mu).$$

Лемма 2.1. *Пусть* $p > 5$. *Тогда*

(i) $M^{03}_{H^1_G}(p-4,0) = \{L(p-4,0) \otimes L(1,0)^{(1)}\}$;

(ii) $M^{03}_{H^1_G}(p-2,1) = \{L(p-2,1) \otimes L(\mu)^{(1)} \mid L(\mu) \in \{L(1,0), L(3,0), L(1,1)\}\}$

(iii) $M^{03}_{H^1_G}(2,p-2) = \{L(2,p-2) \otimes L(\mu)^{(1)} \mid L(\mu) \in \{L(0,0), L(0,1), L(2,0), L(0,2), L(2,1)\}\}$;

(iv) $M^{03}_{H^1_G}(0,p-3) = \{L(0,p-3) \otimes L(2,0)^{(1)},\ L(0,p-3) \otimes L(0,1)^{(1)}\}$.

Доказательство.

(i) $M^{03}_{H^2_G}(p-4,0) \overset{(1.1)}{=}$

$$\{L(p-4,0)\otimes L(\mu)^{(1)} \mid H^0(G, H^3(G_1, L(p-4,0)\otimes L(\mu)^{(1)})^{(-1)}) \neq 0,\ \mu\in X_+(T)\}$$

$$\overset{\text{леммы 1.3,1.7}}{=} \{L(p-4,0)\otimes L(\mu)^{(1)} \mid H^0(G, L(1,0)\otimes L(\mu)) \neq 0,\ \mu\in X_+(T)\} = \{L(p-4,0)\otimes L(1,0)^{(1)}\}.$$

(ii) $M^{03}_{H^2_G}(p-2,1) \overset{(1.1)}{=}$

$$\{L(p-2,1)\otimes L(\mu)^{(1)} \mid H^0(G, H^3(G_1, L(p-2,1)\otimes L(\mu)^{(1)})^{(-1)}) \neq 0,\ \mu\in X_+(T)\}$$

$$\overset{\text{леммы 1.3,1.7}}{=} \{L(p-2,1)\otimes L(\mu)^{(1)} \mid H^0(G, (L(1,0)\oplus L(3,0)\oplus L(1,1))\otimes L(\mu)) \neq 0,\ \mu\in X_+(T)\}$$

$$= \{L(p-2,1)\otimes$$

$$\otimes L(\mu)^{(1)} \mid H^0(G, L(1,0)\otimes L(\mu)) \oplus H^0(G, L(3,0)\otimes L(\mu)) \oplus H^0(G, L(1,1))\otimes L(\mu)) \neq 0,\ \mu\in X_+(T)\}$$

$$= \{L(p-2,1)\otimes$$

$$\otimes L(\mu)^{(1)} \mid Hom_G(L(1,0), L(\mu)) \oplus Hom_G(L(3,0), L(\mu)) \oplus Hom_G(L(1,1), L(\mu)) \neq 0,\ \mu\in X_+(T)\}$$

$$= \{L(p-2,1)\otimes L(\mu)^{(1)} \mid L(\mu)\in\{L(1,0), L(3,0), L(1,1)\}\}.$$

(iii) $M^{03}_{H^2_G}(2,p-2) \overset{(1.1)}{=}$

$$\{L(2,p-2)\otimes L(\mu)^{(1)} \mid H^0(G, H^3(G_1, L(2,p-2)\otimes L(\mu)^{(1)})^{(-1)}) \neq 0,\ \mu\in X_+(T)\}$$

$$\overset{\text{леммы 1.3,1.7}}{=} \{L(2,p-2)\otimes$$

$$\otimes L(\mu)^{(1)} \mid H^0(G, (L(0,0)\oplus L(0,1)\oplus L(2,0)\oplus L(0,2)\oplus L(2,1))\otimes L(\mu)) \neq 0,\ \mu\in X_+(T)\}$$

$$= \{L(2,p-2)\otimes L(\mu)^{(1)} \mid \bigoplus_{\nu\in\{(0,0),(0,1),(0,2),(2,0),(2,1)\}} Hom_G(L(\nu), L(\mu)) \neq 0,\ \mu\in X_+(T)\}$$

$$= \{L(2,p-2)\otimes L(\mu)^{(1)} \mid L(\mu)\in\{L(0,0), L(0,1), L(2,0), L(0,2), L(2,1)\}\}.$$

(iv) $M^{03}_{H^2_G}(0,p-3) \overset{(1.1)}{=}$

$$\{L(0,p-3)\otimes L(\mu)^{(1)} \mid H^0(G, H^3(G_1, L(0,p-3)\otimes L(\mu)^{(1)})^{(-1)}) \neq 0,\ \mu\in X_+(T)\}$$

$$\overset{\text{леммы 1.3,1.7}}{=} \{L(0,p-3)\otimes L(\mu)^{(1)} \mid H^0(G, (L(2,0)\oplus L(0,1))\otimes L(\mu)) \neq 0,\ \mu\in X_+(T)\}$$

$$= \{L(0,p-3)\otimes L(\mu)^{(1)} \mid H^0(G, L(2,0)\otimes L(\mu)) \oplus H^0(G, L(0,1)\otimes L(\mu)) \neq 0,\ \mu\in X_+(T)\}$$

$$\approx \{L(0,p-3)\otimes L(2,0)^{(1)},\ L(0,p-3)\otimes L(0,1)^{(1)}\}.$$

Доказательство следующей леммы совершенно аналогично доказательству предыдущей леммы 2.1.

Лемма 2.2. *Пусть $p > 5$. Тогда*

(i) $M^{12}_{H^3_G}(0,0) = \{L(\mu)^{(1)} \mid L(\mu) \in M_{Ext^1_G}(2,0)\}$.

(ii) $M^{12}_{H^3_G}(p-4,1) = \{L(p-4,1) \otimes L(\mu)^{(1)} \mid L(\mu) \in M_{Ext^1_G}(1,0)\}$;

(iii) $M^{12}_{H^3_G}(2,p-3) = \{L(2,p-3) \otimes L(\mu)^{(1)} \mid L(\mu) \in M_{Ext^1_G}(0,0) \cup M_{Ext^1_G}(0,1)\}$;

(iv) $M^{12}_{H^3_G}(p-2,p-2) = \{L(p-2,p-2) \otimes L(\mu)^{(1)} \mid L(\mu) \in M_{Ext^1_G}(1,0)\}$.

Пусть

$$N(\mu) = \{L(\gamma) \in X_1(T) \mid Ext^1_G(H^1(G_1, L(\mu))^{(-1)^*}, V(\gamma)^1) \neq 0\},$$

где $\mu \in X_1(T)$ и $V(\gamma)^1$ – максимальный подмодуль модуля Вейля $V(\gamma)$.

Лемма 2.3. *Пусть $p > 5$, тогда для* $\mu \in \{(p-2,1),(2,p-2),(0,p-3)\}$ $M^{21}_{H^3_G}(\mu) = N(\mu)$.

Доказательство. Согласно (2.1)

$$E_2^{2l} = H^2(G, H^1(G_1, L(\mu))^{(-1)} \otimes L(\gamma)) \approx H^1(G, H^1(G_1, L(\mu))^{(-1)} \otimes V(\gamma)^1)$$

$$\approx Ext^1_G(H^1(G_1, L(\mu))^{(-1)^*}, V(\gamma)^1).$$

По лемме 1.1 $H^1(G_1, L(\mu))^{(-1)} \neq 0$, только перечисленных в лемме трех случаях.

Лемма 2.4. *Пусть $p > 5$. Тогда* $M^{30}_{H^3_G}(0,0) = \{L(\mu)^{(1)} \mid H^3(G, L(\mu)) \neq 0, \mu \in X_+(T)\}$.

Предложение 2.5. *Пусть $p > 5$. Тогда*

(i) $M^{03}_{H^3_G} = M^{03}_{H^3_G}(p-2,1) \cup M^{03}_{H^3_G}(2,p-2) \cup M^{03}_{H^3_G}(p-4,0) \cup M^{03}_{H^3_G}(0,p-3)$;

(ii) $M^{12}_{H^3_G} = M^{12}_{H^3_G}(p-4,1) \cup M^{12}_{H^3_G}(2,p-3) \cup M^{12}_{H^3_G}(p-2,p-2) \cup M^{12}_{H^3_G}(0,0)$;

(iii) $M^{21}_{H^3_G} = M^{21}_{H^3_G}(p-2,1) \cup M^{21}_{H^3_G}(2,p-2) \cup M^{21}_{H^3_G}(0,p-3)$;

(iv) $M^{30}_{H^3_G} = \{L(\gamma)^{(s)} \mid L(\gamma) \in M^{03}_{H^3_G} \cup M^{12}_{H^3_G} \cup M^{21}_{H^3_G}, s > 0\}$.

Доказательство. *(i)* следует из леммы 1.3 и 2.1; *(ii)* следует из лемм 1.2 и 2.2; *(iii)* следует из лемм 1.1 и 2.3; *(iv)* следует из леммы 2.4. и утверждения *(i) – (iii)* данного предложения.

3. Доказательства основной теоремы.

В данном параграфе мы сформулируем и докажем основную теорему. Сохраняем все обозначения, предыдущего пункта.

Теорема 3.1. *Пусть $G = Sp_4(k)$, $p > 5$ и $L(\lambda)$ – простой G-модуль. Тогда*

$$H^3(G, L(\lambda)) \approx \begin{cases} k, \text{ если } L(\lambda) \in \bigcup\limits_{n+m=3} M^{nm}_{H^3_G}; \\ 0, \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Доказательство. Согласно леммам 1.1–1.3 кратность каждого композиционного фактора когомологии $H^i(G_1, L(\mu))^{(-1)}$, $i = 1,2,3$ равна единице. Кроме того, согласно леммам 3.1–3.3, множества $M^{03}_{H^3_G}(p-2,1)$, $M^{03}_{H^3_G}(2,p-2)$, $M^{03}_{H^3_G}(p-4,0)$, $M^{03}_{H^3_G}(0,p-3)$, $M^{12}_{H^3_G}(p-4,1)$, $M^{12}_{H^3_G}(2,p-3)$,

$M^{12}_{H^1_G}(p-2,p-2)$, $M^{12}_{H^1_G}(0,0)$, $M^{21}_{H^1_G}(p-2,1)$, $M^{21}_{H^1_G}(2,p-2)$ и $M^{21}_{H^1_G}(0,p-3)$ попарно не пересекаются. Поэтому во всех нетривиальных случаях $E_2^{nm} \approx k$ и для завершения доказательства теоремы 3.1 достаточно доказать следующее

Предложение 3.2. *Пусть $p > 3$. $L(\lambda)$ – простой G-модуль и $\lambda = \lambda^0 + p\lambda'$, $\lambda^0 \in X_1(T)$, $\lambda' \in X_+(T)$. Тогда*

(i) $E_2^{30} = E_\infty^{30}$; *(ii)* $E_2^{21} = E_\infty^{21}$;

(iii) $E_2^{12} = E_\infty^{12}$; *(iv)* $E_2^{03} = E_\infty^{03}$; *(v)* $H^3(G, L(\lambda)) = E_2^{30} \oplus E_2^{21} \oplus E_2^{12} \oplus E_2^{03}$.

Доказательство. По определению E_3^{nm} является когомологией последовательности $E_2^{n-2,m+1} \to E_2^{nm} \to E_2^{n+2,m-1}$. Тогда $E_2^{nm} = E_3^{nm}$, если

$$E_2^{n-2,m+1} = E_2^{n+2,m-1} = 0 \text{ когда } E_2^{nm} \neq 0. \tag{3.1}$$

Если $E_2^{nm} \neq 0$, то $H^m(G_1, L(\lambda)) \neq 0$ и согласно леммам 1.2–1.3, условие (3.1) выполняется для всех $(n,m) = (3.0), (2,1), (1,2), (0,3)$.

Аналогично, равенство $E_3^{nm} = E_4^{nm}$ возможно, если

$$E_2^{n-3,m+2} = E_2^{n+3,m-2} = 0, \text{ когда } E_2^{nm} \neq 0. \tag{3.2}$$

Условие (3.2) очевидно только в случае $(n,m) = (2,1)$. Докажем, что оно выполняется и в остальных случаях.

Пусть $(n,m) = (3,0)$ и предположим, что $E_2^{30} \neq 0$ и $E_2^{02} \neq 0$. По (2.1)

$$E_2^{30} = H^3(G, H^0(G_1, L(\lambda^0))^{(-1)} \otimes L(\lambda')),$$

$$E_2^{02} = H^0(G, H^2(G_1, L(\lambda^0))^{(-1)} \otimes L(\lambda')) = Hom_G(H^2(G_1, L(\lambda^0))^{(-1)^*}, L(\lambda')).$$

Так как $E_2^{30} \neq 0$, то $\lambda^0 = (0,0)$ и по лемме 1.2 $E_2^{02} = Hom_G(L(2,0), L(\lambda'))$. Тогда из условия $E_2^{02} \neq 0$ следует, что $L(\lambda') \approx L(2,0)$. Но в этом случае $H^3(G, L(2,0)) = 0$ [9], что противоречит предположению $E_2^{30} \neq 0$. Следовательно, в данном случае условие (3.2) также выполняется.

Пусть теперь $(n,m) = (1,2)$ и предположим, что $E_2^{12} \neq 0$ и $E_2^{40} \neq 0$. По (2.1)

$$E_2^{12} = H^1(G, H^2(G_1, L(\lambda^0))^{(-1)} \otimes L(\lambda')) = Ext^1_G(H^2(G_1, L(\lambda^0))^{(-1)^*}, L(\lambda')),$$

$$E_2^{40} = H^4(G, H^0(G_1, L(\lambda^0))^{(-4)} \otimes L(\lambda')).$$

Так как $E_2^{40} \neq 0$, то $\lambda^0 = (0,0)$ и по лемме 1.2

$$E_2^{12} = H^1(G, L(2,0) \otimes L(\lambda')) = Ext^1_G(L(2,0), L(\lambda')).$$

Тогда из условия $E_2^{12} \neq 0$ и леммы 1.4 следует, что $L(\lambda') \in M_{Ext^1_G}(2,0)$. В таком случае $H^4(G, L(\lambda')) = 0$, так как каждый из старших весов модулей множества $M_{Ext^1_G}(2,0)$ (лемма 1.4) не G-связан с нулем. Но это противоречит предположению $E_2^{40} \neq 0$. Следовательно, условие (3.2) выполняется.

Если $(n,m)=(0,3)$, то из условия $E_2^{03}\neq 0$ и леммы 2.1 следует, что $L(\lambda)\in M^{03}_{H_G^3}$. Тогда используя леммы 1.1 и 1.6 легко показать, что $E_2^{31}=0$ для всех $L(\lambda)\in M^{03}_{H_G^3}$. Следовательно, полученное противоречие доказывает выполнимость условия (3.2).

Таким образом, во всех возможных значениях пары (n,m) условие (3.2) выполняется. Так как $E_4^{30}=E_\infty^{30}$, $E_4^{21}=E_\infty^{21}$ и $E_4^{12}=E_\infty^{12}$, то утверждения *(i) – (iii)* предложения справедливы.

Очевидно, что $E_5^{03}=E_\infty^{03}$. Тогда справедливость утверждения *(iv)* следует из равенства $E_4^{03}=E_5^{03}$. Докажем последнее равенство. E_5^{03} является когомологией последовательности $E_4^{-4,6}\to E_4^{03}\to E_4^{40}$, поэтому мы должны показать, что

$$E_2^{40}=0,\ \text{когда}\ E_2^{03}\neq 0. \tag{3.3}$$

Согласно (2.1)

$$E_2^{03}=H^0(G,H^3(G_1,L(\lambda^0))^{(-1)}\otimes L(\lambda'))=Hom_G(H^3(G_1,L(\lambda^0))^{(-1)^*},L(\lambda')), \tag{3.4}$$

$$E_2^{40}=H^4(G,H^0(G_1,L(\lambda^0))^{(-1)}\otimes L(\lambda')). \tag{3.5}$$

Предположим, что $E_2^{40}\neq 0$, тогда из (3.5) следует, что $\lambda_0=(0,0)$. Но тогда, согласно (3.4), $E_2^{03}=0$, что противоречит условию $E_2^{03}\neq 0$. Таким образом, условие (3.3) выполняется.

Утверждение *(v)* следует из (2.2) и из предыдущих утверждений *(i) – (iv)*. Предложение доказано.

Доказательство теоремы 3.1 завершено.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Yehia S. El.* Extensions of simple modules for the universal Chevalley group and parabolic subgroup. Ph. D. Thesis, Warwick, 1982.
2. *Ye Jiachen.* Extensions of simple modules for the group Sp(4,K) // J. London Math. Soc. 1990. V. 2(41). P. 51-62.
3. *Andersen H.H.* Extensions of modules for algebraic groups // Amer. J. Math. 1984. V. 106. P. 489-504.
4. *Stewart D.I.* The second cohomology of simple SL_3-modules // arXiv:0904.0623v2 [math.RT]. 2009.
5. *Stewart D.I.* The second cohomology of simple SL_3-modules // arXiv:0907.4626v1 [math.RT]. 2009.
6. *Ибраев Ш.Ш.* Ядро Фробениуса и когомологии простых модулей: Материалы межд. научно-практ. конф., посв. 65-ой годовщине Победы. Кызылорда-Киев, 2010. С. 48-52.
7. *Jantzen J.C.* Representations of algebraic groups. Boston: Pure and Applied Mathematics. 1987. V. 131.
8. *Cline E., Parshal B., Scott L.* Cohomology, hyperalgebras and representations // J. of Algebra. 1980. V. 63. P. 98-123.
9. *Sullivan J.B.* Frobenius operations on Hochschild cohomology // Amer. J. Math. 1980. V. 102, N 4. P. 765-780.

Резюме

Мақалада сипаттамасы $p>5$ алгебралық түйық k өрісі үстіндегі жәй бір байланысқан $Sp_4(k)$ алгебралық группасы үшін жәй модульдердің үшінші когомология группалары толық есептелген.

Summary

The third cohomology groups of simple modules for the simple and simply connected algebraic group $Sp_4(k)$ over an algebraically closed field k of characteristic $P>5$ are calculated.

Университет «Баланшак»,
г. Кызылорда

Поступила 28.04.2010г.