Ш.Ш. ИБРАЕВ

3-КОГОМОЛОГИИ ПРОСТЫХ МОДУЛЕЙ ДЛЯ $SL_3(K)$

(Представлена академиком НАН РК А.С. Джумадильдаевым)

Введение. Когомологии простых модулей для простых односвязных алгебраических групп в положительной характеристике относятся к малоизученным вопросам теории когомологии алгебраических групп. В настоящее время известны только когомологии небольших степеней малых алгебраических групп. Первые группы когомологии простых модулей изучены в работах [1,2]. В работе [1] найдены все нетривиальные расширения двух простых модулей для простой односвязной группы $SL_3(k)$. Такой же результат был получен для $Sp_4(k)$ в работе [2]. Вторые группы когомологии простых модулей полностью описаны только для $SL_2(k)$ и $SL_3(k)$ [3,4]. Когомологии третьей степени не известны даже для малых простых односвязных групп. Данная работа посвящена изучению третьей когомологии простых модулей для $SL_3(k)$ над алгебраически замкнутым полем k характеристики $p>3$. Нами найдены все простые $SL_3(k)$-модули с нетривиальными 3-когомологиями. Определены структуры третьей когомологии в нетривиальных случаях. Оказывается, во всех случаях, кроме одного дискретного семейства простых модулей, когда $L(\lambda)\in\{L(p-2,p-2)^{(s)}\otimes L(1,1)^{(s+1)} \mid s\geq 0\}$, группы третьей когомологии одномерны, а в последнем случае она двумерна.

Пусть G – простая односвязная алгебраическая группа $SL_3(k)$ над алгебраически замкнутым полем k характеристики $p>3$. Будем считать, что G определена и расщепляется над простым подполем Z_p поля k. Пусть $G_1 = Ker\, F$, где F – отображения Фробениуса на G. В доказательстве основного результата мы используем следующую методику вычисления. Так как структуры индуцированных $SL_3(k)$-модулей и первые, вторые группы когомологии простых модулей известны, то сначала мы вычислим третью когомологию простых ограниченных модулей для ядра Фробениуса G_1. Потом, используя спектральную последовательность Линдона-Хохшильда-Серра для $G_1 \lhd G$ [5], находим все простые модули с нетривиальными третьими когомологиями, одновременно определив размерности соответствующих третьих когомологий.

1. Обозначения и предварительные факты

1.1. Обозначения. Пусть R – система корней группы G с максимальным корнем $\tilde{\alpha}$, $S=\{\alpha_1,\alpha_2\}$, $R_+=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2\}$ – множества простых и положительных корней соответственно. Обозначим через B и T соответственно подгруппу Бореля и максимальный тор группы G. Действие группы Вейля W системы R на группу характера $X(T)$ максимального тора T определяется по формуле $S_\alpha(\lambda)=\lambda-\langle\lambda,\alpha^\vee\rangle\alpha$, где $s_\alpha\in W$, $\alpha\in R$ и $\alpha^\vee$ – дуальный к α корень. Точечное действие группы Вейля определяется через полусуммы всех положительных корней ρ по формуле $w\cdot\lambda=w(\lambda+\rho)-\rho$, где $w\in W$, $\lambda\in X(T)$.

Структура рационального G – модуля зависит от расположения его старших весов относительно альковов аффинной группы Вейля. Аффинная группа Вейля W_p порождается отражениями вида $s_{\alpha,np}$ для всех $\alpha\in R_+$ и $n\in Z$. Обычно используется точечное действие $s_{\alpha,np}\cdot\lambda=\lambda-\langle\lambda+\rho,\alpha^\vee\rangle\alpha+np\alpha$ аффинной группы Вейля.

Пусть $X_+(T)=\{\lambda\in X(T) \mid \langle\lambda+\rho,\alpha^\vee\rangle\geq 0 \text{ для всех } \alpha\in S\}$ – множество доминантных весов и $X_1(T)=\{\lambda\in X(T) \mid 0\leq\langle\lambda+\rho,\alpha^\vee\rangle<p \text{ для всех} - \alpha\in S\}$ множество ограниченных весов.

Для любого $\lambda\in X(T)$ существует одномерный B– модуль k_λ и индуцированный G – модуль $H^0(\lambda) = Ind_B^G(k_\lambda)$. Известно, что $H^0(\lambda) \neq 0$ тогда и только тогда, если $\lambda \in X_+(T)$. Если $V(\lambda)$ – модуль Вейля со старшим весом λ, то $H^0(\lambda) \approx V(-w_0(\lambda))^*$ [5]. Пусть $L(\lambda)$ – простой G – модуль со старшим весом λ. Его можно определить через $H^0(\lambda)$ или через $V(\lambda)$. С одной стороны он простой цоколь $H^0(\lambda)$ и с другой стороны единственный простой фактор-модуль $V(\lambda)$ по максимальному подмодулю. Все три G – модули, введенные выше, могут быть рассмотрены как G_1 – модули, причем $L(\lambda)$ остается простым при переходе к G_1 [6].

Пусть L – рациональный G – модуль. Через $L^{(d)}$ обозначим кручение Фробениуса степени d для L. Тогда существует рациональный G – модуль V, такой что $V^{(d)} = L$, обозначим его через $L^{(-d)}$.

1.2. Предварительные факты. При доказательстве основной теоремы мы используем следующие известные факты.

1.2.1. Теорема Стейнберга о тензорном произведении. Для любого $\lambda = \lambda^0 + p\lambda^1 + \cdots + p^m\lambda^m \in X_+(T)$, где $\lambda^i \in X_1(T)$, простой G – модуль $L(\lambda)$ со старшим весом λ разлагается в виде следующего тензорного произведения

$L(\lambda) = L(\lambda^0) \otimes L(\lambda^1)^{(1)} \otimes \cdots \otimes L(\lambda^m)^{(m)}$. (1.1)

1.2.2. Принцип связанности и структура индуцированных модулей. Пусть $\lambda, \mu \in X(T)$. Назовем λ *G_1 – связанным (G – связанным) с* μ, если $\lambda \in W_p \cdot \mu + pX(T)$ ($\lambda \in W_p \cdot \mu$). Если $H^i(G_1, L(\lambda)) \neq 0$, то λ G_1 – связан с нулем [5], II.9.19. Аналогично, если $H^i(G, L(\lambda)) \neq 0$, то λ G - связан с нулем [5], II.6.17.

Для $\lambda = a\lambda_1 + b\lambda_2 \in X(T)$, где λ_1, λ_2 – фундаментальные веса, мы будем использовать сокращенное обозначение (a,b). Согласно [7] $W_p \cdot 0 + pX(T) = \{(0,0), (p-2,1), (1,p-2),$

$(p-3,0), (0,p-3), (p-2,p-2)\}$.

Лемма 1.1. [7], 3.3. *Пусть $p > 3$. Для G –модулей со старшими G_1 – связанными с нулем весами имеют место следующие изоморфизмы и короткие точные последовательности:*

(i) $L(0,0) \approx H^0(0,0)$, $L(p-3,0) \approx H^0(p-3,0)$,

$L(0,p-3) \approx H^0(0,p-3)$;

(ii) $0 \to L(p-2,1) \to H^0(p-2,1) \to L(p-3,0) \to 0$;

(iii) $0 \to L(1,p-2) \to H^0(1,p-2) \to L(0,p-3) \to 0$;

(iv) $0 \to L(p-2,p-2) \to H^0(p-2,p-2) \to L(0,0) \to 0$.

1.2.3. Когомологии простых модулей для G_1.

Лемма 1.2. [8], 4.10. *Пусть $\lambda \in X_1(T)$ и $p > 3$. Тогда $H^1(G_1, L(\lambda)) = 0$, кроме следующих случаев:*

(i) $H^1(G_1, L(p-2,1)^{(-1)} \approx L(1,0)$;

(ii) $H^1(G_1, L(1,p-2))^{(-1)} \approx L(0,1)$;

(iii) $H^1(G_1, L(p-2,p-2))^{(-1)} \approx L(0,0)$.

Лемма 1.3. [7], 4.3. *Пусть $\lambda \in X_1(T)$ и $p > 3$. Тогда $H^2(G_1, L(\lambda)) = 0$, кроме следующих случаев:*

(i) $H^2(G_1, L(0,0))^{(-1)} \approx L(1,1)$;

(ii) $H^2(G_1, L(p-3,0))^{(-1)} \approx L(1,0)$;

(iii) $H^2(G_1, L(0,p-3))^{(-1)} \approx L(0,1)$.

1.2.4. Расширения модулей для G. Все расширения двух простых модулей для G найдены в [1]. Мы используем информацию, приведенную в [3], 2.5. Пусть

$$M_{Ext_G^1}(\mu) = \{L(\lambda) \mid \lambda \in X_+(T), Ext_G^1(L(\mu), L(\lambda)) \neq 0\}$$

Лемма 1.4. *Пусть $p > 3$. Тогда*

$$M_{Ext_G^1}(0,0) = \{L(p-2,p-2)^{(r)},\ L(1,p-2)^{(r)} \otimes L(1,0)^{(r+1)},\ L(p-2,1)^{(r)} \otimes L(0,1)^{(r+1)}, r \geq 0\};$$

$$M_{Ext_G^1}(1,0) = \{L(p-2,p-3),\ L(p-3,2) \otimes L(0,1)^{(1)},\ L(2,p-2) \otimes L(1,0)^{(1)},\ L(1,0) \otimes L(p-2,p-2)^{(r+1)},$$
$$L(1,0) \otimes L(1,p-2)^{(r+1)} \otimes L(1,0)^{(r+2)},\ L(1,0) \otimes L(p-2,1)^{(r+1)} \otimes L(0,1)^{(r+2)}, r \geq 0\};$$

$$M_{Ext_G^1}(0,1) = \{L(\lambda)^* \mid L(\lambda) \in M_{Ext_G^1}(1,0)\};$$

$$M_{Ext_G^1}(1,1) = \{L(p-3,p-3),\ L(3,p-3) \otimes L(1,0)^{(1)},\ L(p-3,3) \otimes L(0,1)^{(1)},\ L(1,1) \otimes L(p-2,p-2)^{(r+1)},$$
$$L(1,1) \otimes L(1,p-2)^{(r+1)} \otimes L(1,0)^{(r+2)},\ L(1,1) \otimes L(p-2,1)^{(r+1)} \otimes L(0,1)^{(r+2)}, r \geq 0\}.$$

Во всех перечисленных случаях $Ext_G^1(L(\mu), L(\lambda)) \approx k$.

1.2.5. Вторые когомологии простых модулей для G. Все нетривиальные вторые когомологии найдены в работе [3]. Для $\mu \in X_1(T)$ пусть

$$M^{nm}_{H_G^{n+m}}(\mu) = \{L(\mu + p\gamma) \mid H^n(G, H^m(G_1, L(\mu + p\gamma)^{(-1)}) \neq 0, \gamma \in X_+(T)\};$$

Лемма 1.5. *Пусть $p > 3$. Тогда*

$$(i)\ M^{02}_{H_G^2}(0,0) = \{L(1,1)^{(1)}\};$$

$$M^{02}_{H_G^2}(p-3,0) = \{L(p-3) \otimes L(0,1)^{(1)}\};$$

$$M^{02}_{H_G^2}(0,p-3) = \{L(0,p-3) \otimes L(1,0)^{(1)}\};$$

$$M^{11}_{H_G^2}(p-2,1) = \{L(p-2,1) \otimes L(\mu)^{(1)} \mid L(\mu) \in M_{Ext_G^1}(0,1)\};$$

$$M^{11}_{H_G^2 H_G^2}(1,p-2) = \{L(1,p-2) \otimes L(\mu)^{(1)} \mid L(\mu) \in M_{Ext_G^1}(1,0)\};$$

$$M^{11}_{H_G^2}(p-2,p-2) = \{L(p-2,p-2) \otimes L(\mu)^{(1)} \mid L(\mu) \in M_{Txt_G^1}(0,0)\};$$

$$(ii)\ H^2(G, L(\lambda)) = \begin{cases} k, \textit{если } L(\lambda) \in \bigcup\limits_{n+m=2} M^{nm}_{H_G^2}, \\ 0, \textit{в остальных случаях}, \end{cases}$$

где $M^{02}_{H_G^2} = M^{02}_{H_G^2}(0,0) \cup M^{11}_{H_G^2}(0,p-3) \cup M^{11}_{H_G^2}(p-3,0)$,

$M^{11}_{H_G^2} = M^{11}_{H_G^2}(p-2,1) \cup M^{11}_{H_G^2}(1,p-2) \cup M^{11}_{H_G^2}(p-2,p-2)$, $M^{20}_{H_G^2} = \{L(\mu)^{(d)} \mid L(\mu) \in M^{11}_{H_G^2} \cup M^{02}_{H_G^2}), d > 0\}$.

1.2.6. Когомологии тензорных произведений двух индуцированных модулей для G.

Лемма 1.6. [5], II.4.13. *Если $\lambda, \mu \in X_+(T)$, то*

$$H^i(G, H^0(\lambda) \otimes H^0(\mu)) \approx \begin{cases} k, \textit{ если } i = 0 \textit{ и } \lambda = -w_0(\mu), \\ 0, \textit{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

*1.2.7. **Фильтрация Янцена для модулей Вейля*** [11], [12]. Для модуля Вейля $V(\lambda)$ со старшим весом $\lambda \in X_+(T)$ существует следующая убывающая последовательность подмодулей

$$V(\lambda) = V(\lambda)^0 \supset V(\lambda)^1 \supset \cdots \supset V(\lambda)^i \supset \cdots,$$

где $V(\lambda)^i = 0$ для достаточно больших i. Формальный характер фильтрации Янцена удовлетворяет «формулу сумм»

$$\sum_{i>0} chV(\lambda)^i = \sum_{\alpha\in R_+} \sum_{0<mp<\langle \lambda+\rho,\alpha^\vee\rangle} v(mp)ch(s_{\alpha,mp}\cdot\lambda). \qquad (1.2)$$

2. 3-когомологии простых ограниченных модулей для G_1

В данном пункте вычислены когомологии третьей степени простых ограниченных модулей ядра Фробениуса G_1.

Предложение 2.1. *Пусть* $\lambda \in X_1(T)$ *и* $p>3$. *Тогда* $H^3(G_1, L(\lambda)) = 0$, *кроме следующих случаев:*

(i) $H^3(G_1, L(p-2,1))^{(-1)} \approx L(1,0) \oplus L(0,2) \oplus L(2,1)$;

(ii) $H^3(G_1, L(1, p-2))^{(-1)} \approx L(0,1) \oplus L(2,0) \oplus L(1,2)$;

(iii) $H^3(G_1, L(p-2, p-2))^{(-1)} \approx L(1,1) \oplus L(1,1)$.

Доказательство. Как было отмечено выше, существуют только 6 G_1-связанных с нулем весов, поэтому мы рассмотрим только те простые модули, которые соответствуют этим старшим весам.

Так как по лемме 1.1*(i)* индуцированные модули, соответствующие старшим весам $(0,0), (p-3,0), (0,p-3)$, являются простыми, то согласно общей формуле Андерсена-Янцена [13]

$$H^i(G_1, H^0(w\cdot 0 + p\nu))^{(-1)} \approx \begin{cases} Ind_B^G(S^{\frac{i-l(w)}{2}}(u^*)\otimes k_\nu), \text{ если } i-l(w) \text{ четно;} \\ 0 \text{ в остальных случаях} \end{cases} \qquad (2.1)$$

их третьи когомологии равны нулю. Здесь u – нильпотентная подалгебра алгебры Ли группы G, соответствующая отрицательным корням; $l(w)$ длина элемента $w \in W$.

Пусть теперь $\lambda = (p-2,1)$. Рассмотрим длинную когомологическую точную последовательность G_1-когомологии, соответствующую короткой точной последовательности *(ii)* леммы 1.1. По формуле (2.1) $H^2(G_1, H^0(\lambda)) \approx H^3(G_1, L(p-3,0) = 0$, поэтому получаем следующую точную последовательность G-модулей:

$$0 \to H^2(G_1, L(p-3,0) \to H^3(G_1, L(\lambda)) \to H^3(G_1, H^0(\lambda)) \to 0.$$

Согласно лемме 1.3 $H^2(G_1, L(p-3,0))^{(-1)} \approx L(1,0)$ и по формуле (2.1), $H^3(G_1, H^0(p-2,1))^{(-1)} \approx L(0,2) \oplus L(2,1)$. Кроме того, $(1,0)$ не G-связан ни с одним из старших весов $(0,2), (2,1)$. Поэтому последняя точная последовательность расщепляется и дает требуемый изоморфизм *(i)* предложения.

Случай $\lambda = (1, p-2)$ доказывается аналогично предыдущему случаю.

В случае $\lambda = (p-2, p-2)$, с учетом леммы 1.3, точная последовательность G_1-когомологии имеет вид

$$0 \to H^2(G_1, L(0,0)) \to H^3(G_1, L(\lambda)) \to H^3(G_1, H^0(\lambda)) \to 0.$$

Тогда $H^3(G_1,L(\lambda))^{(-1)} \approx H^2(G_1,L(0,0))^{(-1)} \oplus H^3(G_1,H^0(\lambda))^{(-1)}$. Так как, по лемме 1.3 $H^2(G_1,L(0,0)))^{(-1)} \approx L(1,1)$ и по формуле (2.1), $H^2(G_1,L(\lambda))^{(-1)} \approx L(1,1)$, то $H^3(G_1,L(\lambda))^{(-1)} \approx L(1,1) \oplus L(1,1)$. Предложение доказано.

3. Семейства простых модулей с нетривиальной третьей когомологией

В данном параграфе с помощью спектральной последовательности Линдона-Хохшильда-Серра дается множество всех простых G-модулей с нетривиальной третьей когомологией. Сохраняем обозначение $M^{nm}_{H^{n+m}_G}(\mu)$ для $\mu \in X_1(T)$, введенное в пункте 1.2.5.

Для простого G-модуля $L(\lambda)$ спектральная последовательность Линдона-Хохшильда-Серра имеет вид [5], I.6.6.(3):

$$E_2^{nm} = H^n(G,H^m(G_1,L(\lambda))^{(-1)})) \Rightarrow H^{n+m}(G,L(\lambda)). \tag{3.1}$$

Если E_∞^{nm} – стабилизированное значение точек предыдущей спектральной последовательности, то

$$H^i(G,L(\lambda)) = \oplus_{n+m=i} E_\infty^{nm}. \tag{3.2}$$

Пусть $M^{nm}_{H^{n+m}_G} = \{L(\lambda) \mid E_2^{nm} \neq 0\}$, тогда из определения $M^{nm}_{H^{n+m}_G}(\mu)$ и (3.1) следует, что

$$M^{nm}_{H^{n+m}_G} = \bigcup_{\mu \in \{\gamma \in X_1(T) \mid H^m(G_1,L(\gamma))^{(-1)} \neq 0\}} M^{nm}_{H^{n+m}_G}(\mu).$$

Лемма 3.1. *Пусть* $p>3$. *Тогда*

(i) $M^{03}_{H^3_G}(p-2,1) = \{L(p-2,1) \otimes L(\mu)^{(1)} \mid L(\mu) \in \{L(0,1), L(2,0), L(1,2)\}\}$;

(ii) $M^{03}_{H^3_G}(1,p-2) = \{L(1,p-2) \otimes L(\mu)^{(1)} \mid L(\mu) \in \{L(1,0), L(0,2), L(2,1)\}\}$;

(iii) $M^{03}_{H^3_G}(p-2,p-2) = \{L(p-2,p-2) \otimes L(1,1)^{(1)}\}$.

Доказательство. *(i)* $M^{03}_{H^3_G}(p-2,1) \overset{(1.1)}{=}$

$$\{L(p-2,1) \otimes L(\mu)^{(1)} \mid H^0(G,H^3(G_1,L(p-2,1) \otimes L(\mu)^{(1)})^{(-1)}) \neq 0,\ \mu \in X_+(T)\}$$

$$\overset{\text{предл.2.1; [14], лемма 1.1}}{=} \{L(p-2,1) \otimes L(\mu)^{(1)} \mid H^0(G,(L(1,0) \oplus L(0,2) \oplus L(2,1)) \otimes L(\mu)) \neq 0,\ \mu \in X_+(T)\}$$

$$= \{L(p-2,1) \otimes L(\mu)^{(1)} \mid H^0(G,L(1,0) \otimes L(\mu)) \oplus H^0(G,L(0,2) \otimes L(\mu)) \oplus H^0(G,L(2,1)) \otimes L(\mu)) \neq 0,\ \mu \in X_+(T)\}$$

$$= \{L(p-2,1) \otimes L(\mu)^{(1)} \mid Hom_G(L(0,1),L(\mu)) \oplus Hom_G(L(2,0),L(\mu)) \oplus Hom_G(L(1,2),L(\mu)) \neq 0,\ \mu \in X_+(T)\}$$

$$= \{L(p-2,1) \otimes L(\mu)^{(1)} \mid L(\mu) \in \{L(0,1), L(2,0), L(1,2)\}\}.$$

(ii) $M^{03}_{H^3_G}(1,p-2) \overset{(1.1)}{=}$

$$\{L(1,p-2) \otimes L(\mu)^{(1)} \mid H^0(G,H^3(G_1,L(1,p-2) \otimes L(\mu)^{(1)})^{(-1)}) \neq 0,\ \mu \in X_+(T)\}$$

$$\overset{\text{предл.2.1; [14], лемма 1.1}}{=} \{L(1,p-2) \otimes L(\mu)^{(1)} \mid H^0(G,(L(0,1) \oplus L(2,0) \oplus L(1,2)) \otimes L(\mu)) \neq 0,\ \mu \in X_+(T)\}$$

$$= \{L(1,p-2) \otimes L(\mu)^{(1)} \mid H^0(G,L(0,1) \otimes L(\mu)) \oplus H^0(G,L(2,0) \otimes L(\mu)) \oplus H^0(G,L(1,2)) \otimes L(\mu)) \neq 0,\ \mu \in X_+(T)\}$$

$$= \{L(1,p-2) \otimes L(\mu)^{(1)} \mid Hom_G(L(1,0),L(\mu)) \oplus Hom_G(L(0,2),L(\mu)) \oplus Hom_G(L(2,1),L(\mu)) \neq 0,\ \mu \in X_+(T)\}$$

$= \{L(1,p-2)\otimes L(\mu)^{(1)} \,|\, L(\mu)\in\{L(1,0),L(0,2),L(2,1)\}\}$.

(iii) $M^{03}_{H^3_G}(p-2,p-2) \overset{(1.1)}{=}$

$\{L(p-2,p-2)\otimes L(\mu)^{(1)} \,|\, H^0(G,H^3(G_1,L(p-2,p-2)\otimes L(\mu)^{(1)})^{(-1)})\neq 0,\ \mu\in X_+(T)\}$

$\overset{\text{предл. 2.1; [14], лемма 1.1}}{=} \{L(p-2,p-2)\otimes L(\mu)^{(1)} \,|\, H^0(G,(L(1,1)\oplus L(1,1))\otimes L(\mu))\neq 0,\ \mu\in X_+(T)\}$

$= \{L(p-2,p-2)\otimes L(\mu)^{(1)} \,|\, H^0(G,L(1,1)\otimes L(\mu))\oplus H^0(G,L(1,1)\otimes L(\mu))\neq 0,\ \mu\in X_+(T)\}$

$\approx \{L(p-2,p-2)\otimes L(1,1)^{(1)}\}$.

Доказательство следующей леммы совершенно аналогично доказательству предыдущей леммы 3.1.

Лемма 3.2. *Пусть* $p>3$. *Тогда*

(i) $M^{12}_{H^3_G}(p-3,0)=\{L(p-3,0)\otimes L(\mu)^{(1)} \,|\, L(\mu)\in M_{Ext^1_G}(0,1)\}$;

(ii) $M^{12}_{H^3_G}(0,p-3)=\{L(0,p-3)\otimes L(\mu)^{(1)} \,|\, L(\mu)\in M_{Ext^1_G}(1,0)\}$;

(iii) $M^{12}_{H^3_G}(0,0)=\{L(\mu)^{(1)} \,|\, L(\mu)\in M_{Ext^1_G}(1,1)\}$.

Пусть

$$N(\mu)=\{L(\gamma)\in X_1(T) \,|\, Ext^1_G(H^2(G_1,L(\mu))^{(-1)^*},V(\gamma)^1)\neq 0\},$$

где $\mu\in X_1(T)$ и $V(\gamma)^1$ – максимальный подмодуль модуля Вейля $V(\gamma)$.

Лемма 3.3. *Пусть* $p>5$, *тогда для* $\mu\in\{(p-2,1),(1,p-2),(p-2,p-2)\}$ $M^{21}_{H^3_G}(\mu)=N(\mu)$.

Доказательство. Согласно (3.1)

$E^{21}_2 = H^2(G,H^1(G_1,L(\mu))^{(-1)}\otimes L(\gamma))\approx H^1(G,H^1(G_1,L(\mu))^{(-1)}\otimes V(\gamma)^1)$

$\approx Ext^1_G(H^1(G_1,L(\mu))^{(-1)^*},V(\gamma)^1)$.

По лемме 1.2 $H^1(G_1,L(\mu))^{(-1)}\neq 0$, только перечисленных в лемме трех случаях.

Лемма 3.4 *Пусть* $p>3$. *Тогда* $M^{30}_{H^3_G}(0,0)=\{L(\mu)^{(1)} \,|\, H^3(G,L(\mu))\neq 0,\ \mu\in X_+(T)\}$.

Доказательство.

$$M^{30}_{H^3_G}(0,0)=\{L(0,0)\otimes L(\mu)^{(1)} \,|\, H^3(G,H^0(G_1,L(0,0)\otimes L(\mu)^{(1)})^{(-1)})\neq 0,\ \mu\in X_+(T)\}$$

$= \{L(\mu)^{(1)} \,|\, H^3(G,L(0,0)\otimes L(\mu))\neq 0,\ \mu\in X_+(T)\} = \{L(\mu)^{(1)} \,|\, H^3(G,L(\mu))\neq 0,\ \mu\in X_+(T)\}$.

Предложение 3.5. *Пусть* $p>3$. *Тогда*

(i) $M^{03}_{H^3_G} = M^{03}_{H^3_G}(p-2,1)\cup M^{03}_{H^3_G}(1,p-2)\cup M^{03}_{H^3_G}(p-2,p-2)$;

(ii) $M^{12}_{H^3_G} = M^{12}_{H^3_G}(p-3,0)\cup M^{12}_{H^3_G}(0,p-3)\cup M^{12}_{H^3_G}(0,0)$;

(iii) $M^{21}_{H^3_G} = M^{21}_{H^3_G}(p-2,1)\cup M^{21}_{H^3_G}(1,p-2)\cup M^{21}_{H^3_G}(p-2,p-2)$;

(iv) $M^{30}_{H^3_G} = \{L(\gamma)^{(s)} \,|\, L(\gamma)\in M^{03}_{H^3_G}\cup M^{12}_{H^3_G}\cup M^{21}_{H^3_G},\ s>0\}$.

Доказательство. *(i)* следует из предложения 2.1 и леммы 3.1; *(ii)* следует из лемм 1.3 и 3.2; *(iii)* следует из лемм 1.2 и 3.3; *(iv)* следует из леммы 3.4. и утверждения *(i)* – *(iii)* данного предложения.

4. Основная теорема

В данном параграфе мы сформулируем и докажем основную теорему. Сохраняем все обозначения предыдущего пункта.

Теорема 4.1. *Пусть* $G = SL_3(k)$, $p > 3$ *и* $L(\lambda)$ *– простой* G*-модуль.*

Тогда $$H^3(G, L(\lambda)) \approx \begin{cases} k, \text{ если } L(\lambda) \in \bigcup\limits_{n+m=3} M^{nm}_{H^3_G} \setminus \{L(p-2,p-2)^{(s)} \otimes L(1,1)^{(s+1)}, s \geq 0\}; \\ k \oplus k, \text{ если } L(\lambda) \in \{L(p-2,p-2)^{(s)} \otimes L(1,1)^{(s+1)}, s \geq 0\}; \\ 0, \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Доказательство. Согласно леммам 1.2, 1.3 и предложению 2.1 кратность вхождения данного неприводимого модуля (при наличии) к соответствующим когомологиям $H^i(G_1, L(\mu))^{(-1)}$, $i = 1,2,3$ равна единице, кроме одного случая, когда $\mu = (p-2, p-2)$ и $i = 3$. В последнем случае кратность $L(1,1)$ равна двум. Поэтому $E_2^{03} = k \oplus k$, если $L(\lambda) = L(p-2,p-2) \otimes L(1,1)^{(1)}$ и $E_2^{30} = k \oplus k$, если $L(\lambda) \in \{L(p-2,p-2)^{(s)} \otimes L(1,1)^{(s+1)}, s \geq 1$. Во всех остальных нетривиальных случаях $E_2^{nm} \approx k$.

Согласно леммам 3.1 – 3.3, множества $M^{03}_{H^3_G}(p-2,1)$, $M^{03}_{H^3_G}(1,p-2)$, $M^{03}_{H^3_G}(p-2,p-2)$, $M^{12}_{H^3_G}(p-3,0)$, $M^{12}_{H^3_G}(0,p-3)$, $M^{12}_{H^3_G}(0,0)$, $M^{21}_{H^3_G}(p-2,1)$, $M^{21}_{H^3_G}(1,p-2)$ и $M^{21}_{H^3_G}(p-2,p-2)$ попарно не пересекаются. Поэтому для завершения доказательства теоремы 4.1 достаточно доказать следующее

Предложение 4.2. *Пусть* $p > 3$, $L(\lambda)$ *– простой* G*-модуль и* $\lambda = \lambda^0 + p\lambda'$, $\lambda^0 \in X_1(T)$, $\lambda' \in X_+(T)$.

Тогда (i) $E_2^{30} = E_\infty^{30}$; *(ii)* $E_2^{21} = E_\infty^{21}$; *(iii)* $E_2^{12} = E_\infty^{12}$; *(iv)* $E_2^{03} = E_\infty^{03}$;

(v) $H^3(G, L(\lambda)) = E_2^{30} \oplus E_2^{21} \oplus E_2^{12} \oplus E_2^{03}$.

Доказательство. По определению E_3^{nm} является когомологией последовательности $E_2^{n-2,m+1} \to E_2^{nm} \to E_2^{n+2,m-1}$. Тогда $E_2^{nm} = E_3^{mn}$, если

$$E_2^{n-2,m+1} = E_2^{n+2,m-1} = 0 \text{ когда } E_2^{nm} \neq 0. \tag{3.3}$$

Если $E_2^{nm} \neq 0$, то $H^m(G_1, L(\lambda)) \neq 0$ и согласно леммам 1.2, 1.3 и предложению 2.1, условие (3.3) выполняется для всех $(n,m) = (3.0), (2,1), (1,2), (0,3)$.

Аналогично равенство $E_3^{nm} = E_4^{mn}$ возможно, если

$$E_2^{n-3,m+2} = E_2^{n+3,m-2} = 0, \text{ когда } E_2^{nm} \neq 0. \tag{3.4}$$

Условие (3.4) очевидно только в случае $(n,m) = (2,1)$. Докажем, что оно выполняется и в остальных случаях.

Пусть $(n,m) = (3,0)$ и предположим, что $E_2^{30} \neq 0$ и $E_2^{02} \neq 0$. По (3.1)

$$E_2^{30} = H^3(G, H^0(G_1, L(\lambda^0))^{(-1)} \otimes L(\lambda')),$$

$$E_2^{02} = H^0(G, H^2(G_1, L(\lambda^0))^{(-1)} \otimes L(\lambda')) =$$

$$= Hom_G(H^2(G_1, L(\lambda^0))^{(-1)^*}, L(\lambda')).$$

Так как $E_2^{30} \neq 0$, то $\lambda^0 = (0,0)$ и по лемме 1.3 $E_2^{02} = Hom_G(L(1,1), L(\lambda'))$. Тогда из условия $E_2^{02} \neq 0$ следует, что $L(\lambda') \approx L(1,1)$. Но в этом случае $H^3(G, L(1,1)) = 0$ [14], что противоречит предположению $E_2^{30} \neq 0$. Следовательно, в данном случае условие (3.4) также выполняется.

Пусть теперь $(n,m) = (1,2)$ и предположим, что $E_2^{12} \neq 0$ и $E_2^{40} \neq 0$. По (3.1)

$$E_2^{12} = H^1(G, H^2(G_1, L(\lambda^0))^{(-1)} \otimes L(\lambda')) =$$

$$= Ext_G^1(H^2(G_1, L(\lambda^0))^{(-1)^*}, L(\lambda')),$$

$$E_2^{40} = H^4(G, H^0(G_1, L(\lambda^0))^{(-1)} \otimes L(\lambda')).$$

Так как $E_2^{40} \neq 0$, то $\lambda^0 = (0,0)$ и по лемме 1.3

$$E_2^{12} = H^1(G, L(1,1) \otimes L(\lambda')) = Ext_G^1(L(1,1), L(\lambda')).$$

Тогда из условия $E_2^{12} \neq 0$ и леммы 1.4 следует, что $L(\lambda') \in M_{Ext_G^1}(1,1)$. В таком случае $H^4(G, L(\lambda')) = 0$, так как каждый из старших весов модулей множества $M_{Ext_G^1}(1,1)$ (лемма 1.4) не G-связан с нулем. Но это противоречит предположению $E_2^{40} \neq 0$. Следовательно, условие (3.4) выполняется.

Если $(n,m) = (0,3)$, то из условия $E_2^{03} \neq 0$ и леммы 3.1 следует, что $L(\lambda) \in M_{H_G^3}^{03}$. Тогда используя леммы 1.2 и 1.6, легко показать, что $E_2^{31} = 0$ для всех $L(\lambda) \in M_{H_G^3}^{03}$. Следовательно, полученное противоречие доказывает выполнимость условия (3.4).

Таким образом, во всех возможных значениях пары (n,m) условие (3.4) выполняется. Так как $E_4^{30} = E_\infty^{30}$, $E_4^{21} = E_\infty^{21}$ и $E_4^{12} = E_\infty^{12}$, то утверждения *(i) – (iii)* предложения справедливы.

Очевидно, что $E_5^{03} = E_\infty^{03}$. Тогда справедливость утверждения *(iv)* следует из равенства $E_4^{03} = E_5^{03}$. Докажем последнее равенство. E_5^{03} является когомологией последовательности $E_4^{-4,6} \to E_4^{03} \to E_4^{40}$, поэтому мы должны показать, что

$$E_2^{40} = 0, \text{ когда } E_2^{03} \neq 0. \qquad (3.5)$$

Согласно (3.1)

$$E_2^{03} = H^0(G, H^3(G_1, L(\lambda^0))^{(-1)} \otimes L(\lambda')) =$$

$$= Hom_G(H^3(G_1, L(\lambda^0))^{(-1)^*}, L(\lambda')), \qquad (3.6)$$

$$E_2^{40} = H^4(G, H^0(G_1, L(\lambda^0))^{(-1)} \otimes L(\lambda')). \qquad (3.7)$$

Предположим, что $E_2^{40} \neq 0$, тогда из (3.7) следует, что $\lambda_0 = (0,0)$. Но тогда, согласно (3.6), $E_2^{03} = 0$, что противоречит условию $E_2^{03} \neq 0$. Таким образом, условие (3.5) выполняется.

Утверждение *(v)* следует из (3.2) и из предыдущих утверждений *(i) – (iv)*. Предложение доказано.

Доказательство теоремы 4.1 завершено.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Yehia S. El.* Extensions of simple modules for the universal Chevalley group and parabolic subgroup. Ph.D. Thesis, Warwick, 1982.

2. *Ye Jiachen.* Extensions of simple modules for the group Sp(4,K) // J. London Math. Soc., vol. 2(41), 1990, P. 51-62.

3. *Stewart D.I.* The second cohomology of simple SL_2-modules // arXiv:0904.0623v2 [math.RT], 2009.

4. *Stewart D.I.* The second cohomology of simple SL_3-modules // arXiv:0907.4626v1 [math.RT], 2009.

5. *Jantzen J.C.* Representations of algebraic groups. Boston: Pure and Applied Mathematics. vol. 131, 1987.

6. *Cline E., Parshal B., Scott L.* Cohomology, hyperalgebras and representations // J. of Algebra, vol. 63, 1980, P. 98-123.

7. *Dzhumadil'daev A.S., Ibraev S.S.* Nonsplit extensions of modular Lie algebras of rank 2 // Homology, homotopy and applications, vol. 4(2), 2002, P. 141-163.

8. *Jantzen J.C.* First cohomology groups for classical Lie algebras // Progress in Math. Vol. 95, 1991, P. 289-315.

9. *Wang J.-P.* Sheaf cohomology on G/B and tensor products of Weyl modules // J. Algebra, vol. 77, 1982, P. 162-185.

10. *Винберг Е.Б., Онищик А.Л.* Семинар по группа Ли и алгебраическим группам. М.: Наука, 1988.

11. *Andersen H.H.* Filtrations of cohomology modules for Chevalley groups // Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., Vol. 16, 1983, P. 495-528.

12. *Jantzen J.C.* Weyl modules for groups of Lie type // Finite simple groups II, Academic Press, London, 1980, P. 291-300.

13. *Andersen H.H., Jantzen J.C.* Cohomology of induced representations for algebraic groups // Math. Annalen, Vol.269, 1984, P. 487-525.

14. *Sullivan J.B.* Frobenius operations on Hochschild cohomology // Amer. J. Math., Vol. 102, №4, 1980, P. 765-780.

Резюме

Сипаттамасы p>3 алгебралық тұйық k өрісі үстіндегі жәй бір байланысқан $SL_3(k)$ алгебралық группасы үшін жәй модульдердің үшінші когомология группалары толық есептелген.

Summary

The third cohomology groups of simple modules for the simple and simply connected algebraic group $SL_3(k)$ over an algebraically closed field k of characteristic p>3 are calculated.

Университет «Болашак» *Поступило 30.06.2010 г.*