Н. С. ИМАНБАЕВ, А. Д. НИЯЗЫМБЕТОВ

ОБ ОПЕРАТОРАХ, ПОРОЖДАЕМЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ОПЕРАЦИЕЙ КОШИ-РИМАНА

(Представлена академиком НАН РК Т. Ш. Кальменовым)

Описаны все корректные задачи, порождаемые дифференциальной операцией Коши-Риман.

В функциональном пространстве $C(|z|\le 1)$ рассмотрим операторы К, порождаемые дифференциальной операцией Коши-Римана

$$K\omega(z)=\frac{\partial\omega(z)}{\partial\bar z}, \qquad (1)$$

где $z=x+iy$, $\bar z=x-iy$, $\frac{\partial}{\partial\bar z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ на множестве

$$D(K)\subset\left\{\omega(z)\in C(|z|\le 1),\frac{\partial\omega}{\partial\bar z}\in C(|z|<1)\right\}.$$

Считаем, что оператор **К** имеет непустое резольвентное множество $\rho(\mathbf{K})$. Не умоляя общности, предполагаем, что

$$0\in\rho(\mathbf{K}), \qquad (2)$$

т.е. существует ограниченный оператор $\mathbf{K}^{-1}$. В следующей теореме полностью описано множество операторов {К} со свойством (2).

Теорема 1. Для каждого линейного оператора **К** с условием (2) найдется ограниченный оператор G, переводящий непрерывные в круге $|z|\le 1$ функции в голоморфные, у которых мнимые части при z=0 равны нулю, а также ограниченный функционал $S(f)$ на множестве непрерывных функций в круге $|z|\le 1$, которые однозначно определяют область определения оператора К по формуле:

$$D(K)=\left\{\omega(z)\in C(|z|\le 1),\frac{\partial\omega}{\partial\bar z}\in C(|z|<1)\right\},$$

$$\operatorname{Re}\omega(z)=\operatorname{Re}G\left(\frac{\partial\omega}{\partial\bar z}\right),\quad |z|=1,$$

$$\operatorname{Im}\omega(z)=\operatorname{Im}S\left(\frac{\partial\omega}{\partial\bar z}\right),\quad z=0.$$

Обратно, пара G и S определяют **К**, для которого верно (2).

Доказательство. Известно ([2], с. 151), что краевая задача

$$\frac{\partial\omega(z)}{\partial\bar z}=f(z),\ \ |z|<1,$$

$$\operatorname{Re}\omega(z)\big|_{|z|=1}=g(z),$$

$$\operatorname{Im}\omega(0)=C$$

имеет единственное решение $\omega(z)$ при любом наборе

$$f(z)\in C(|z|<1),\ g(z)\in C(|z|=1), C\in R.$$

Больше того, это решение дается формулой Шварца

$$\omega(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1}g(z)\frac{t+z}{t-z}\cdot\frac{dt}{t}+iC+L_{\Phi}^{-1}f(z),\ (3)$$

где $\omega_{\Phi}(z)=L_{\Phi}^{-1}f(z)$ является решением однородной краевой задачи для неоднородного уравнения

$$\frac{\partial\omega_{\Phi}(z)}{\partial\bar z}=f(z),\ |z|<1,$$

с однородными краевыми условиями:

$$\operatorname{Re}\omega_{\Phi}(z)\big|_{|z|=1}=0,\ \operatorname{Im}\omega_{\Phi}(0)=0.$$

Пусть оператор **К** задается соотношением (1). Допустим выполняется условие (2), что означает существование ограниченного обратного оператора $\mathbf{K}^{-1}$. Следовательно, операторное уравнение $K\omega(z)=f(z)$ имеет единственное решение

$$\omega(z)=K^{-1}f(z).\qquad(1.4)$$

Обозначим реальную часть решения $\omega(z)$ на окружности $|z|=1$ через $g(z)$, а мнимую часть значения решения $\omega(z)$ при $z=0$ через С. Тогда согласно формуле (3) левую часть соотношения (4) запишем в виде

$$\omega(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1}g(z)\frac{t+z}{t-z}\cdot\frac{dt}{t}+iC+L_{\Phi}^{-1}f(z).$$

Поскольку операторы L_{Φ}^{-1} и $\mathbf{K}^{-1}$ ограничены, то разность $\mathbf{K}^{-1}-L_{\Phi}^{-1}$ представляет собой ограниченный оператор, переводящий функции из $C(|z|\le1)$ в голоморфные функции на $|z|<1$. Введем оператор по формуле $g(z)=Gf\equiv\operatorname{Re}\omega(z)\big|_{|z|=1}$, а также функционал $C=S(f)\equiv\operatorname{Im}\omega(0)\big|_{z=0}$, где $\omega(z)$ определяется по формуле (4).

Из теоремы 1.19 ([3], с. 39) следуют свойства оператора T_G. В частности, функция $\omega_0(z)=$

$$=T_0f\equiv\frac{-1}{\pi}\iint_{|\zeta|<1}\frac{f(\zeta)d\xi d\eta}{\zeta-z},\quad\text{когда}\quad f\in C(|z|\le1),$$

является непрерывной ограниченной на всей комплексной плоскости. Нетрудно понять, что

$$L_{\Phi}^{-1}f=T_Gf+Af+iDf,$$

где

$$Af=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\overline{(T_Gf)(\xi)}}{\xi-z}d\xi,$$

$$2iDf=-(T_Gf)(0)-(Af)(0)+\overline{(T_Gf)(0)}+\overline{(Af)(0)}.$$

В силу вышеуказанной теоремы 1.19 из [3] следует оценка $\left\|L_{\Phi}^{-1}f\right\|\le const\,\|f\|$. Поэтому для оператора

$$(\mathrm{K}^{-1}-L_{\Phi}^{-1})f=\text{Ш}Gf+iS(f),$$

где Ш – оператор Шварца из формулы (3), справедлива оценка $\|\text{Ш}Gf+iS(f)\|\le\|f\|\cdot const$, для произвольного элемента $f\in C(|z|\le1)$. Отсюда видно, что $S(f)$ ограниченный функционал. Поскольку оператор Шварца подчинен неравенству $\|\text{Ш}h\|\le\|h\|\cdot const$ для элементов $h\in C(|z|\le1)$. В данном случае роль h играет Gf, следовательно, оператор G также ограничен. Итак, оператор G ограничен, точно так же, как и функционал S. Отсюда получим, что $\omega(z)=K^{-1}f$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial\omega}{\partial\bar z}=f,\ |z|<1$$

и краевым условиям

$$\operatorname{Re}\omega(z)\big|_{|z|=1}=G(f(z)),$$

$$\operatorname{Im}\omega(z)\big|_{|z|=0}=S(f).$$

Обратное проверяется непосредственно, что завершает доказательство теоремы 1.

С другой точки зрения неоднородная система Коши-Римана и ее обобщения изучались И. Н. Векуа [3], Н. К. Блиевым [4] и другими. В их работах достаточно подробно исследовались обобщенная задача Римана-Гильберта, задача сопряжения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Отелбаев М., Шыныбеков А.Н.* О корректных задачах типа Бицадзе-Самарского // ДАН СССР. 1982. Т. 265, № 4. С. 815-819.

2. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М., 1968. 511 с.

3. *Векуа И.Н.* Обобщенные аналитические функции. М.: Наука, 1988. 512 с.

4. *Блиев Н.К.* Обобщенные аналитические функции в дробных пространствах. Алма-Ата: Наука, 1985. 322 с.

5. *Иманбаев Н.С.* О нетеровости одного сингулярного интегрального уравнения // Изв. НАН РК. Сер. Физ.-мат. 2002. № 1(221). С. 90-92.

6. *Иманбаев Н.С.* О задачах на собственные значения для операторов, порождаемых операцией Коши–Римана. Шымкент: Алтын алқа, 2007. 97 с.

Резюме

Коши-Риман дифференциалдық амалынан туындайтын операторларға арналған барлық орынды есептер қамтылып көрсетілген.

Summary

In persisting mark is drawn all well-behaved problems generated differential operation Koshi-Rimana's.

УДК 517.945

Международный
Казахско-Турецкий университет
им. А. Ясауи, г. Шымкент

Поступила 21.12.2009г.