

УДК 517.927.25

Н.С. ИМАНБАЕВ, М.А. САДЫБЕКОВ

БАЗИСНЫЕ СВОЙСТВА КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ НАГРУЖЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА

(Представлена академиком НАН РК Т.Ш. Кальменовым)

В настоящее время хорошо известно, что в случае несамосопряженных обыкновенных дифференциальных операторов на базисность систем корневых функций, помимо краевых условий, могут влиять также значения коэффициентов дифференциального оператора. При этом базисные свойства корневых функций могут изменяться даже при сколь угодном малом изменении значений коэффициентов. Впервые этот факт был отмечен в работе В.А.Ильина [1]. Идеи В.А. Ильина были развиты А.С.Макиным [2] на случай несамосопряжённого возмущения самосопряженной периодической задачи. Оператор в [2] изменялся за счет возмущения одного из краевых условий.

В настоящей работе мы рассматриваем другой вариант возмущения самосопряженной задачи, а именно спектральную задачу следующего вида

$$-u''(x) + q(x)u(0) = \lambda u(x), \quad 0 < x < 1, \quad (1)$$

$$u(0) = u(1), \quad u'(0) = u'(1). \quad (2)$$

Уравнения типа (1) относят к классу так называемых нагруженных дифференциальных уравнений, так как второе слагаемое в левой части равенства (1) содержит значение искомой функции в точке нуль. Рассматриваемая задача (1)-(2) является несамосопряженным возмущением самосопряженной периодической задачи. В отличие от работы [2], здесь возмущение происходит за счет изменения уравнения.

Вопросы базисности корневых функций нагруженных дифференциальных операторов были изучены в работах И.С.Ломова [3], [4]. Ему удалось распространить метод спектральных разложений В.А.Ильина [1] на случай нагруженных дифференциальных операторов. Другим методом вопросы базисности функционально-дифференциальных уравнений были исследованы в работе [5].

В случае, когда $q(x) = 0$, системой собственных функций задачи (1)-(2) является обычная тригонометрическая система, которая образует полную ортонормированную систему в $L_2(0,1)$. В

случае же, когда $q(x) \neq 0$ требуется дополнительное исследование. Ранее другие подходы к исследованию задачи (1)-(2) были опубликованы в наших работах [7-8].

Обозначим через B множество функций $q(x) \in L_1(0,1)$ таких, что система собственных и присоединенных функций задачи (1)-(2) образует базис Рисса в $L_2(0,1)$; $\bar{B} = L_1(0,1) \setminus B$. Основным результатом работы является следующая

Теорема. Пусть $q(x) \in L_1(0,1)$. Тогда множества B и \bar{B} всюду плотны в $L_1(0,1)$.

Схема доказательства. Считая $u(0)$ – некоторой независимой константой, легко убедиться, что общее решение уравнения (1) представимо в виде

$$\begin{aligned} u(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda}x + C_2 \frac{\sin \sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} + \\ + u(0) \int_0^x q(\xi) \frac{\sin \sqrt{\lambda}(x-\xi)d\xi}{\sqrt{\lambda}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Отсюда, полагая сначала $x = 0$ а затем удовлетворяя (3) краевым условиям (2), получаем систему из трех уравнений, которая в векторноматричной форме представима в виде:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -\cos \sqrt{\lambda} & -\frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} & 1 - \int_0^1 q(\xi) \frac{\sin \sqrt{\lambda}(1-\xi)}{\sqrt{\lambda}} d\xi \\ \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} & 1 - \cos \sqrt{\lambda} & -\int_0^1 q(\xi) \cos \sqrt{\lambda}(1-\xi) d\xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ u(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Несложными вычислениями получаем, что характеристический определитель $\Delta(\lambda)$ спектральной задачи (1)-(2) представляется в виде

$$\Delta(\lambda) = 2 \sin \frac{\sqrt{\lambda}}{2} \left[-2 \sin \frac{\sqrt{\lambda}}{2} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^1 q(t) \cos \sqrt{\lambda} \left(\frac{1}{2} - t \right) dt \right] \quad (5)$$

Функцию $q(x)$ представим в виде тригонометрического ряда Фурье $q(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2n\pi x + b_n \sin 2n\pi x$. Тогда, после вычисления, из (5) имеем

$$\Delta(\lambda) = 4 \sin^2 \frac{\sqrt{\lambda}}{2} \cdot \left[-1 + \frac{a_0}{2\lambda} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda - (2n\pi)^2} \right] \quad (6)$$

Исследуем характер поведения нулей целой функции (6). Будем обозначать через $R(z, r)$ – окружность радиуса r с центром в точке z . Очевидно, что в правой полуплоскости вне окружности $R(2\pi n, \frac{1}{2})$ ($n = 0, 1, \dots$) имеем $\left| \sin^2 \frac{\sqrt{\lambda}}{2} \right| \geq C_0 > 0$.

Поэтому для уравнения $\Delta(\lambda) = 0$ с применением теоремы Руше [6] находим, что все достаточно большие по абсолютной величине нули $\sqrt{\lambda_m}$ расположены внутри окружностей $R(2\pi n, \frac{1}{2})$ и внутри каждой из этих окружностей функции $\Delta(\lambda)$ и $\sin^2 \frac{\sqrt{\lambda}}{2}$ имеют равное число нулей.

Из вида (6) характеристического определителя видно, что коэффициенты b_n , отвечающие за “нечетную” часть $q(x)$, не меняют собственных значений. Из (6) следует также, что $\lambda_m = (2m\pi)^2$ есть собственные значения.

Если при некотором m коэффициент $a_m = 0$, то λ_m – двукратное собственное значение. Покажем, что если $a_m \neq 0$, то λ_m – однократное собственное значение. Для этого $\Delta(\lambda)$ в окрестности собственного значения $\lambda_m = (2m\pi)^2$ представим в виде:

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) = 4 \sin \frac{\sqrt{\lambda}}{2} \cdot \frac{\sin \frac{\sqrt{\lambda}}{2}}{\lambda - (2m\pi)^2} \left[[(2m\pi)^2 - \lambda] + \right. \\ \left. + \frac{a_0}{2} \frac{\lambda - (2m\pi)^2}{\lambda} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\lambda - (2m\pi)^2}{\lambda - (2n\pi)^2} \right]. \end{aligned}$$

Так как при $\lambda \rightarrow (2m\pi)^2$ имеем:

$$\frac{\sin \frac{\sqrt{\lambda}}{2}}{\lambda - (2m\pi)^2} \rightarrow \frac{(-1)^m}{8m\pi},$$

$$\left[[(2m\pi)^2 - \lambda] + \frac{a_0}{2} \frac{\lambda - (2m\pi)^2}{\lambda} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\lambda - (2m\pi)^2}{\lambda - (2n\pi)^2} \right] \rightarrow a_m,$$

то, в окрестности собственного значения $\lambda_m = (2m\pi)^2$ характеристический определитель имеет вид

$$\Delta(\lambda) = a_m \frac{(-1)^m}{8m\pi} 4 \sin \frac{\sqrt{\lambda}}{2}. \text{ Поэтому } \lambda_m = (2m\pi)^2 \text{ – однократный корень.}$$

Несложные вычисления убеждают нас в том, что однократному собственному значению (обозначим его $\lambda_m^{(1)}$) соответствует одна собственная функция $u_m^{(1)}(x) = \sin 2m\pi x$. При этом в случае $a_m \neq 0$, существует вторая серия однократных собственных значений $\lambda_m^{(2)} = \mu_m^2$, такая, что

$$\mu_m = 2m\pi + a_m \left(\frac{1}{4m\pi} + O\left(\frac{1}{m^3}\right) \right). \quad (7)$$

Соответствующие собственным значениям (7) собственные функции имеют вид

$$u_m^{(2)}(x) = \cos \mu_m x + \int_0^x q(\xi) \frac{\sin \mu_m (x - \xi) d\xi}{\mu_m}.$$

Если, начиная с некоторого номера $n \geq N_0$, все коэффициенты $a_n = 0$, $b_n = 0$, то набор собственных значений рассматриваемой нагруженной спектральной задачи (1)-(2) отличается от набора собственных значений (невозмущенной) периодической задачи только конечным числом элементов. Поэтому при $q(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N_0} a_n \cos 2n\pi x + b_n \sin 2n\pi x$ мы имеем систему $\{u_k^{(1)}(x), u_k^{(2)}(x)\}$ собственных и присоединенных функций рассматриваемой спектральной задачи (1)-(2), в которой для $m \geq N_0$

$$u_m^{(1)}(x) = \sin 2m\pi x, \quad u_m^{(2)}(x) = \cos 2m\pi x +$$

$$+ \int_0^x q(\xi) \sin 2m\pi(x - \xi) d\xi.$$

Поскольку $|\sin 2m\pi(x - \xi)| \leq 1$ и $\int_0^1 |q(x)| dx \leq C_0$, то сравнивая эту систему с обычной тригонометрической системой $\{\sin 2m\pi x, \cos 2m\pi x\}$, получаем

$$\|u_m^{(1)}(x) - \sin 2m\pi x\|_{L_2[0,1]} = 0, \quad \|u_m^{(2)}(x) - \cos 2m\pi x\|_{L_2[0,1]} \leq \frac{C_0}{2m\pi}.$$

Так как ряд $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{C^2}{4m^2\pi^2} < \infty$, то последнее означает квадратическую близость системы $\{u_k^{(1)}(x), u_k^{(2)}(x)\}$ и тригонометрической системы. Значит (см., например, [9, стр. 22]), система $\{u_k^{(1)}(x), u_k^{(2)}(x)\}$ есть базис Рисса. Поскольку совокупность тригонометрических полиномов всюду плотна в $L_1(0,1)$, то в качестве множества B мы можем брать множество тригонометрических полиномов. Первая часть теоремы доказана.

Покажем теперь, что когда функция $q(x)$ представима бесконечным рядом Фурье $q(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2n\pi x + b_n \sin 2n\pi x$, в некоторых специальных случаях, среди собственных и присоединенных функций спектральной задачи (1)-(2) можно выделить две подпоследовательности собственных и присоединенных функций $u_m^{(1)}(x)$ и $u_m^{(2)}(x)$, элементы которых асимптотически приближаются друг к другу, то есть “слипаются”.

Пусть существует бесконечная подпоследовательность $a_m \neq 0, b_m \neq 0$. В этом случае имеются две серии подпоследовательностей собственных

значений: $\lambda_m^{(1)} = (2m\pi)^2$ и $\lambda_m^{(2)} = (2m\pi)^2 + a_m \cdot O\left(\frac{1}{m}\right)$.

Соответствующие им подпоследовательности собственных функций имеют вид:

$$u_m^{(1)}(x) = \frac{\sin 2m\pi x}{2m\pi} \quad \text{и} \quad u_m^{(2)}(x) = \frac{\sin \sqrt{\lambda_m^{(2)}}x}{\sqrt{\lambda_m^{(2)}}} + \frac{a_m}{b_m}(1 + O(1)).$$

Отсюда легко видеть, что при $\frac{a_m}{b_m} \rightarrow 0$, две подпоследовательности собственных и присоединенных функций $u_m^{(1)}(x)$ и $u_m^{(2)}(x)$ асимптотически приближаются друг к другу, то есть “слипаются”.

Другими словами углы $\cos \varphi = \frac{(u_m^{(1)}, u_m^{(2)})}{\|u_m^{(1)}\| \|u_m^{(2)}\|}$

между указанными элементами $u_m^{(1)}(x)$ и $u_m^{(2)}(x)$ стремятся к нулю. Поэтому такая система никак не может быть базисом. В силу известных результатов теории рядов Фурье получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ всегда найдется такое число N_0 , что

$$\left\| \sum_{n=1}^{N_0} a_n \cos 2n\pi x + b_n \sin 2n\pi x - \right.$$

$$\left. - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2n\pi x + b_n \sin 2n\pi x \right\| < \varepsilon$$

Отсюда будет следовать всюду плотность множества \bar{B} в пространстве $L_1(0,1)$. Теорема доказана.

В заключение заметим, что построенный нами явный вид характеристического определителя (6) позволяет построить примеры таких коэффициентов a_n , что любое наперед заданное число λ^* будет собственным значением спектральной задачи (1)-(2) с любой заранее заданной кратностью k .

Работа выполнена при финансовой поддержке бюджетной программы “Фундаментальные и прикладные научные исследования” Министерства образования и науки Республики Казахстан.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильин В.А. О связи между видами краевых условий и свойствами базисности и равносходимости с тригонометрическим рядом разложений по корневым функциям несамосопряженного дифференциального оператора // Дифференциальные уравнения. 1994. Т. 30, №9 . С. 1516-1529.
2. Макин А.С. О нелокальном возмущении периодической задачи на собственные значения // Дифференциальные уравнения. 2006. Т. 42, №4 . С. 560-562.
3. Ломов И.С. Свойство базисности корневых векторов нагруженных дифференциальных операторов второго порядка на интервале // Дифференциальные уравнения. 1991. Т. 27, №1. С. 80-94.
4. Ломов И.С. Теорема о безусловной базисности корневых векторов нагруженных дифференциальных операторов второго порядка// Дифференциальные уравнения. 1991. Т. 27, №9 . С. 1550-1563.
5. Гомилко А.М., Радзивеский Г.В. Базисные свойства собственных функций регулярной краевой задачи для векторного функционально-дифференциального уравнения / / Дифференциальные уравнения. 1991. Т. 27, №3. С. 385-395.
6. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Часть 1. М. 1976. С. 320.
7. Иманбаев Н.С., Садыбеков М.А. Базисность систем, связанных с нагруженными дифференциальными уравнениями// Труды международной научно - практической конференции. Том III, естественные науки. Жетысай-Шымкент, 2008, университет “Сырдария”. С.89-90.
8. Imanbaev N.S., Sadybekov M.A. Basic properties of root functions of the loaded differential operators of the second order// Abstracts. Of the third congress of the world mathematical society of Turkic countries. Al-Farabi Kazakh national university. Almaty, june 30 – july 4, 2009. Volume 1.
9. Абдижакан М. Сарсенби. Теория базисности корневых векторов линейных несамосопряженных дифференциальных операторов в гильбертовом пространстве. Шымкент, 2009. 267 с.

Резюме

$q(x) \in L_1(0,1)$ болған жағдайдағы екінші ретті жүктемеліңген дифференциалдық оператордың меншікті және қосымша алынған функцияларының базистік қасиеттері зерттелген.

Summary

In the present note we consider a spectral problem basic properties of root functions of the loaded differential operators of the second order.

Международный Казахско-Турецкий университет им. А. Ясауи, Шымкент, Казахстан

Поступила 21.12.2009 г.