УДК 517.9

Е. И. ИМАНГАЛИЕВ

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

В работе построено методом погранслойных функций асимптотическое разложение решения интегральной краевой задачи для сингулярно возмущенного линейного интегро-дифференциального уравнения и получена оценка остаточного члена с любой степенью точности по малому параметру путем решения вспомогательной задачи Коши с начальным скачком.

Рассмотрим следующее линейное интегро-дифференциальное уравнение третьего порядка типа Фредгольма

$$L_\varepsilon y \equiv \varepsilon y''' + A(t)y'' + B(t)y' + C(t)y = F(t) + \int_0^1 \left[K_0(t,x)y(x,\varepsilon) + K_1(t,x)y'(x,\varepsilon) + K_2(t,x)y''(x,\varepsilon)\right]dx \quad (1)$$

с интегральными краевыми условиями вида

$$H_0 y = y(0,\varepsilon) - \int_0^1 \left[b_0(t)y(t,\varepsilon) + b_1(t)y'(t,\varepsilon) + b_2(t)y''(t,\varepsilon)\right]dt = a_0,$$

$$H_1 y = y'(0,\varepsilon) - \int_0^1 \left[c_0(t)y(t,\varepsilon) + c_1(t)y'(t,\varepsilon) + c_2(t)y''(t,\varepsilon)\right]dt = a_1,$$

$$H_2 y = y(1,\varepsilon) - \int_0^1 \left[d_0(t)y(t,\varepsilon) + d_1(t)y'(t,\varepsilon) + d_2(t)y''(t,\varepsilon)\right]dt = a_2, \quad (2)$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр, a_i, $i = \overline{0,2}$ – известные постоянные, $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $F(t)$, $b_i(t)$, $c_i(t)$, $d_i(t)$, $K_i(t,x)$, $i = \overline{0,2}$ – некоторые известные функции, определенные в области $D = \{0 \le t \le 1,\ 0 \le x \le 1\}$.

Предположим, что:

I. Функции $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $F(t)$, $b_i(t)$, $c_i(t)$, $d_i(t)$, $K_i(t,x)$, $i = \overline{0,2}$ – достаточно гладкие в области D.

II. Функция $A(t)$ удовлетворяет неравенству: $A(t) \ge \gamma = const > 0$, $0 \le t \le 1$.

III. Справедливо неравенство: $\lambda_1(t) \ne \lambda_2(t)$, где $\lambda_i(t)$, $i = 1,2$ корни уравнения $A(t)\lambda^2(t) + B(t)\lambda(t) + C(t) = 0$.

$\overline{y}_i(t)$, $i = 1,2$ являются фундаментальной системой решений уравнения

$$L_0 y \equiv A(t)\overline{y}'' + B(t)\overline{y}' + C(t)\overline{y} = 0.$$

IV. Число 1 при достаточно малых ε не является собственным значением ядра $J(t,x,\varepsilon)$

$$J(t,s,\varepsilon) = \overline{J}(t,s) + O\left(\varepsilon + e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^1 \mu(x)dx}\right) = \frac{1}{A(s)}\left[K_2(t,s) + \int_s^1 \left[K_0(t,x)\overline{K}_2(x,0) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + K_1(t,x)\overline{K}_2'(x,0) + K_2(t,x)\overline{K}_2''(x,0)\right]dx\right] + O\left(\varepsilon + e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^1 \mu(x)dx}\right),$$

где $\overline{K}_2(t,s)=\dfrac{\overline{W}_2(t,s)}{\overline{W}(s)}$, $\overline{W}_1(t,s)=\begin{vmatrix}\overline{y}_1(s) & \overline{y}_2(s)\\ \overline{y}_1(t) & \overline{y}_2(t)\end{vmatrix}$, $\overline{W}(s)=\begin{vmatrix}\overline{y}_1(s) & \overline{y}_2(s)\\ \overline{y}_1'(s) & \overline{y}_2'(s)\end{vmatrix}$, $\overline{y}_i(t)$, $i=1,2$ являются фундаментальной системой решений уравнения

$$L_0 y = A(t)\overline{y}''+B(t)\overline{y}'+C(t)\overline{y}=0.$$

V. Справедливы неравенства:

$$1-\Delta_{0b}^0\neq 0,\ 1-\Delta_{1c}^0\neq 0,\ \Delta_0^0=\left(1-\Delta_{0b}^0\right)\left(1-\Delta_{1c}^0\right)-\Delta_{1b}^0\Delta_{0c}^0\neq 0,$$

где

$$\Delta_{0b}^0=\int_0^1\left[b_0(t)u_0(t)+b_1(t)u_0'(t)+b_2(t)u_0''(t)\right]dt,\qquad \Delta_{1b}^0=\int_0^1\left[b_0(t)u_1(t)+b_1(t)u_1'(t)+b_2(t)u_1''(t)\right]dt,$$

$$\Delta_{0c}^0=\int_0^1\left[c_0(t)u_0(t)+c_1(t)u_0'(t)+c_2(t)u_0''(t)\right]dt,\qquad \Delta_{1c}^0=\int_0^1\left[c_0(t)u_1(t)+c_1(t)u_1'(t)+c_2(t)u_1''(t)\right]dt,$$

$$u_i(t)=\Psi_i(t)+\int_0^t\frac{1}{A(s)}\Psi_1(t,s)\sigma_i(s)ds,\qquad \sigma_i(t)=\varphi_i(t)+\int_0^1 R(t,s)\varphi_i(s)ds,\ i=0,1,$$

$R(t,s)$ – резольвента ядра $J(t,s)$, а функция $\varphi_i(t)$ представима в виде:

$$\varphi_i(t)=\int_0^1\left[K_0(t,x)\Psi_i(x,0)+K_1(t,x)\Psi_i'(x,0)+K_2(t,x)\Psi_i''(x,0)\right]dx,\ i=0,1,$$

$\Psi_j(t,s)$ – решения задачи:

$$L_0\Psi_i(t,s)=0,\ \Psi_{ij}^{(j)}(s,s)=\delta_{ij},\ j=0,1\ (\delta_{ij}\text{ – символ Кронекера}).$$

Из теоремы 4 [4] видно, что решение $y(t,\varepsilon)$, $y'(t,\varepsilon)$ интегральной краевой задачи (1), (2) в точке $t=0$ ограничены и его вторая производная $y''(t,\varepsilon)$ в точке $t=0$ имеет неограниченный рост порядка $O(1/\varepsilon)$ при $\varepsilon\to 0$. В связи с этим для построения асимптотики решения краевой задачи (1), (2) предварительно рассмотрим вспомогательную задачу Коши с начальным скачком, т.е. рассмотрим уравнение (1) с начальными условиями в точке $t=0$:

$$H_0 y=y(0,\varepsilon)-\int_0^1\left[b_0(t)y(t,\varepsilon)+b_1(t)y'(t,\varepsilon)+b_2(t)y''(t,\varepsilon)\right]dt=a_0,$$

$$H_1 y=y'(0,\varepsilon)-\int_0^1\left[c_0(t)y(t,\varepsilon)+c_1(t)y'(t,\varepsilon)+c_2(t)y''(t,\varepsilon)\right]dt=a_1,\quad y''(0,\varepsilon)=\frac{\alpha}{\varepsilon},\tag{3}$$

где $\alpha=\alpha(\varepsilon)$ – регулярно зависящая от ε постоянная, представимая в виде:

$$\alpha(\varepsilon)=\alpha_0+\varepsilon\alpha_1+\varepsilon^2\alpha_2+\ldots.\tag{4}$$

Определим $\alpha(\varepsilon)$ таким образом, чтобы решение $y(t,\alpha,\varepsilon)$ задачи (1), (3) было решением (1), (2), т.е. чтобы было выполнено третье условие (2):

$$H_2 y=y(1,\alpha,\varepsilon)-\int_0^1\left[d_0(t)y(t,\alpha,\varepsilon)+d_1(t)y'(t,\alpha,\varepsilon)+d_2(t)y''(t,\alpha,\varepsilon)\right]dt=a_2.\tag{5}$$

Введем функцию $\overline{y}_n(t,\varepsilon)$ по следующей формуле:

$$\overline{y}_n(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k y_k(t)+\varepsilon\sum_{k=0}^{n+1}\varepsilon^k w_k(\tau),\quad \tau=\frac{t}{\varepsilon},\tag{6}$$

где коэффициенты $y_k(t)$, $0 \le t \le 1$, $k = \overline{0,n}$ регулярные на отрезке [0,1] функции $y_\varepsilon(t)$, коэффициенты $w_k(\tau)$, $\tau \ge 0$, $k = \overline{0,n+1}$ погранслойной при $\tau \ge 0$ функции $w_\varepsilon(\tau)$ определены в [5].

Теорема. Пусть выполнены условия I-VI. Тогда при достаточно малых значениях ε решение $y(t,\varepsilon)$ краевой задачи (1), (2) на отрезке $[0,1]$ существует единственно и представимо в виде:

$$y(t,\varepsilon) = \bar{y}_n(t,\varepsilon) + R_n(t,\varepsilon), \tag{7}$$

где $\bar{y}_n(t,\varepsilon)$ выражается формулой (6), а для остаточного члена $R_n(t,\varepsilon)$ справедливы оценки:

$$\left|R_n^{(i)}(t,\varepsilon)\right| \le C\varepsilon^{n+1}, \quad i = \overline{0,2}, \quad 0 \le t \le 1, \tag{8}$$

где $C > 0$ – некоторая постоянная, не зависящая от ε.

Доказательство. Существование и единственность решения задачи (1), (2) доказаны в теореме 3 [3]. Поэтому осталось доказать оценки (8). Подставляя (7) в (1), (2) получим для остаточного члена $R_n(t,\varepsilon)$ следующую сингулярно возмущенную задачу:

$$\begin{aligned} L_\varepsilon R_n &\equiv \varepsilon R_n''' + A(t)R_n'' + B(t)R_n' + C(t)R_n = \\ &= F_0(t,\varepsilon) + \int_0^1 \left[K_0(t,x)R_n(x,\varepsilon) + K_1(t,x)R_n'(x,\varepsilon) + K_2(t,x)R_n''(x,\varepsilon)\right]dx \end{aligned} \tag{9}$$

с условиями

$$H_0 R_n = R_n(0,\varepsilon) - \int_0^1 \left[b_0(t)R_n(t,\varepsilon) + b_1(t)R_n'(t,\varepsilon) + b_2(t)R_n''(t,\varepsilon)\right]dt = O\left(\varepsilon^{n+1}\right),$$

$$H_1 R_n = R_n'(0,\varepsilon) - \int_0^1 \left[c_0(t)R_n(t,\varepsilon) + c_1(t)R_n'(t,\varepsilon) + c_2(t)R_n''(t,\varepsilon)\right]dt = O\left(\varepsilon^{n+1}\right),$$

$$R_n''(0,\varepsilon) = O\left(\varepsilon^{n+1}\right), \tag{10}$$

где

$$F_0(t,\varepsilon) \equiv F(t) - L_\varepsilon \bar{y}_n = F(t) - \left(\varepsilon \bar{y}_n'' + A(t)\bar{y}_n' + B(t)\bar{y}_n' + C(t)\bar{y}_n\right) = O(\varepsilon). \tag{11}$$

Докажем, что решение $R_n(t,\varepsilon)$ задачи Коши (9), (10) с учетом начальных функций $K_i(t,s,\varepsilon)$, $i = \overline{1,3}$, $0 \le s \le t \le 1$, определенными в [3], имеет следующее аналитическое представление

$$\begin{aligned} R_n(t,\varepsilon) = &\left(R_n(0,\varepsilon) - \int_0^1 \left[b_0(t)R_n(t,\varepsilon) + b_1(t)R_n'(t,\varepsilon) + b_2(t)R_n''(t,\varepsilon)\right]dt\right)K_1(t,0,\varepsilon) + \\ &+ \left(R_n'(0,\varepsilon) - \int_0^1 \left[c_0(t)R_n(t,\varepsilon) + c_1(t)R_n'(t,\varepsilon) + c_2(t)R_n''(t,\varepsilon)\right]dt\right)K_2(t,0,\varepsilon) + \\ &+ R_n''(0,\varepsilon)K_3(t,0,\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t K_3(t,s,\varepsilon)F(s,\varepsilon)ds, \end{aligned} \tag{12}$$

где функция $F(t,\varepsilon)$ правая часть уравнения (9):

$$F(t,\varepsilon) = F_0(t,\varepsilon) + \int_0^1 \left[K_0(t,x)R_n(x,\varepsilon) + K_1(t,x)R_n'(x,\varepsilon) + K_2(t,x)R_n''(x,\varepsilon)\right]dx, \tag{13}$$

подлежащая определению.

Действительно, из (12) с учетом $K_i(t,s,\varepsilon)$, $i = \overline{1,3}$ найдем

$$R_n'(t,\varepsilon)=\left(R_n(0,\varepsilon)-\int_0^1\left[b_0(t)R_n(t,\varepsilon)+b_1(t)R_n'(t,\varepsilon)+b_2(t)R_n''(t,\varepsilon)\right]dt\right)K_1'(t,0,\varepsilon)+$$

$$+\left(R_n'(0,\varepsilon)-\int_0^1\left[c_0(t)R_n(t,\varepsilon)+c_1(t)R_n'(t,\varepsilon)+c_2(t)R_n''(t,\varepsilon)\right]dt\right)K_2'(t,0,\varepsilon)+$$

$$+R_n''(0,\varepsilon)K_3'(t,0,\varepsilon)+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t K_3'(t,s,\varepsilon)F(s,\varepsilon)ds,$$

$$R_n''(t,\varepsilon)=\left(R_n(0,\varepsilon)-\int_0^1\left[b_0(t)R_n(t,\varepsilon)+b_1(t)R_n'(t,\varepsilon)+b_2(t)R_n''(t,\varepsilon)\right]dt\right)K_1''(t,0,\varepsilon)+$$

$$+\left(R_n'(0,\varepsilon)-\int_0^1\left[c_0(t)R_n(t,\varepsilon)+c_1(t)R_n'(t,\varepsilon)+c_2(t)R_n''(t,\varepsilon)\right]dt\right)K_2''(t,0,\varepsilon)+$$

$$+R_n''(0,\varepsilon)K_3''(t,0,\varepsilon)+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t K_3''(t,s,\varepsilon)F(s,\varepsilon)ds,$$

$$R_n'''(t,\varepsilon)=\left(R_n(0,\varepsilon)-\int_0^1\left[b_0(t)R_n(t,\varepsilon)+b_1(t)R_n'(t,\varepsilon)+b_2(t)R_n''(t,\varepsilon)\right]dt\right)K_1'''(t,0,\varepsilon)+$$

$$+\left(R_n'(0,\varepsilon)-\int_0^1\left[c_0(t)R_n(t,\varepsilon)+c_1(t)R_n'(t,\varepsilon)+c_2(t)R_n''(t,\varepsilon)\right]dt\right)K_2'''(t,0,\varepsilon)+$$

$$+R_n''(0,\varepsilon)K_3'''(t,0,\varepsilon)+\frac{1}{\varepsilon}F(t,\varepsilon)+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t K_3'''(t,s,\varepsilon)F(s,\varepsilon)ds. \qquad (14)$$

Подставляя теперь (12), (14) в (9) и начальные условия (10) можно убедиться, что формула (12) действительно является решением задачи (9), (10).

Найдем неизвестную функцию $F(t,\varepsilon)$. Для этого формулы (12), (14) подставляем в (13):

$$F(t,\varepsilon)=\overline{F}_0(t,\varepsilon)+\int_0^1 J(t,s,\varepsilon)F(s,\varepsilon)ds, \qquad (15)$$

где свободный член $\overline{F}_0(t,\varepsilon)$ и ядро $J(t,s,\varepsilon)$ выражаются формулами:

$$\overline{F}_0(t,\varepsilon)=F_0(t,\varepsilon)+\left(R_n(0,\varepsilon)-\int_0^1\left[b_0(t)R_n(t,\varepsilon)+b_1(t)R_n'(t,\varepsilon)+b_2(t)R_n''(t,\varepsilon)\right]dt\right)\times$$

$$\times\int_0^1\left[K_0(t,x)K_1(x,0,\varepsilon)+K_1(t,x)K_1'(x,0,\varepsilon)+K_2(t,x)K_1''(x,0,\varepsilon)\right]dx+$$

$$+\left(R_n'(0,\varepsilon)-\int_0^1\left[c_0(t)R_n(t,\varepsilon)+c_1(t)R_n'(t,\varepsilon)+c_2(t)R_n''(t,\varepsilon)\right]dt\right)\times$$

$$\times\int_0^1\left[K_0(t,x)K_2(x,0,\varepsilon)+K_1(t,x)K_2'(x,0,\varepsilon)+K_2(t,x)K_2''(x,0,\varepsilon)\right]dx+$$

$$+R_n''(0,\varepsilon)\int_0^1\left[K_0(t,x)K_3(x,0,\varepsilon)+K_1(t,x)K_3'(x,0,\varepsilon)+K_2(t,x)K_3''(x,0,\varepsilon)\right]dx,$$

$$J(t,s,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}\int_s^1\left[K_0(t,x)K_3(x,s,\varepsilon)+K_1(t,x)K_3'(x,s,\varepsilon)+K_2(t,x)K_3''(x,s,\varepsilon)\right]dx. \qquad (16)$$

Подставляем асимптотические представления из теоремы 1 [3] в (16) для $J(t,s,\varepsilon)$, преобразуем и с учетом леммы 1 [3] запишем:

$$J(t,s,\varepsilon)=\overline{J}(t,s)+O\left(\varepsilon+e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \mu(x)dx}\right),$$

где

$$\overline{J}(t,s)=\frac{K_2(t,s)}{A(s)}+\frac{1}{A(s)}\int_s^1\left[K_0(t,x)\overline{K}_2(x,s)+K_1(t,x)\overline{K}_2{}'(x,s)+K_2(t,x)\overline{K}_2{}''(x,s)\right]dx.$$

В силу условия IV уравнение (15) на отрезке $[0,1]$ имеет единственное решение $F(t,\varepsilon)$, выражаемое формулой

$$F(t,\varepsilon)=\overline{F}_0(t,\varepsilon)+\int_0^1 R(t,s,\varepsilon)\overline{F}_0(s,\varepsilon)ds, \tag{17}$$

где $R(t,s,\varepsilon)$ – резольвента ядра $J(t,s,\varepsilon)$. Так как ядро $\overline{J}(t,s)$ ограничено в области $D=\{0\le t\le 1,\ 0\le s\le 1\}$ и тем самым, ядро $J(t,s,\varepsilon)$ при достаточно малых ε так же ограничено в D. Учитывая, что $\mu(t)=-A(t)\le-\gamma=const<0$, $0\le t\le 1$, а также теоремы 1 [3], (11) из формулы (16) для $\overline{F}_0(t,\varepsilon)$ непосредственно получаем:

$$\overline{F}_0(t,\varepsilon)=O\left(\varepsilon^{n+1}\right),\ 0\le t\le 1. \tag{18}$$

Оценивая теперь формулу (17), в силу ограниченности резольвенты $R(t,s,\varepsilon)$ и (18), будем иметь:

$$F(t,\varepsilon)=O\left(\varepsilon^{n+1}\right),\ \ 0\le t\le 1. \tag{19}$$

Если оценить (12), (14) и принять во внимание (19), то получим:

$$R_n^{(i)}(t,\varepsilon)=O\left(\varepsilon^{n+1}\right),\ i=\overline{0,2},\ 0\le t\le 1.$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вишик М.И., Люстерник Л.А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // УМН. 1957. Т. 12, № 5. С. 3-122; *Новиков П.С.* Об единственности решения обратной задачи теории потенциала // ДАН СССР. 1938. Т. 18. С. 152-155.

2. *Ломов С.А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981. 400 с.

3. *Имангалиев Е.И.* Аналитическое представление решения интегральной краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения // Изв. НАН РК. Сер. физ.-мат. 2010. № 1. С. 32-39.

4. *Имангалиев Е.И.* Асимптотические оценки решения интегральной краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения // Изв. НАН РК. Сер. физ.-мат. 2010. № 3. С. 147-158.

5. *Имангалиев Е.И.* Асимптотические решения интегральной краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения // Мат-лы V Междун. научно-метод. конф. «Математическое моделирование и информационные технологии в образовании и науке». Алматы, 2010. С. 81-93.

Резюме

Шекаралық жік функцияларының әдісімен сызықтық интегралдық дифференциалдық теңдеу үшін сингулярлы ауытқыған интегралдық шекаралық есеп шешімінің асимптотикалық жіктеуі құрастырылған және бастапқы секірісі бар Коши дың қосалқы есепті шешіп аз параметр бойынша кез келген дәлдіктен қалдық мүшесінің бағасы алынған.

Summary

In the method of boundary-layer functions, we construct an asymptotic expansion of the solution of the integral boundary value problems for linear singularly perturbed integro-differential equation and an estimate of the remainder with any degree of accuracy in the small parameter by solving an auxiliary Cauchy problem with initial jump.

КазНУ им. аль-Фараби, г. Алматы *Поступила 08.10.10г.*