УДК 510.532

Ас. А. ИСАХОВ

(Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Республика Казахстан)

НУМЕРАЦИИ ФРИДБЕРГА СЕМЕЙСТВА ВСЮДУ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ФУНКЦИЙ В АРИФМЕТИЧЕСКОЙ ИЕРАРХИИ

Аннотация. На основе обобщенного понятия вычислимой нумерации для семейств функций в арифметической иерархии было доказано, что бесконечное Σ^0_{n+2}-вычислимое семейство всюду определенных функций имеет бесконечное число попарно неэквивалентных нумераций Фридберга.

Ключевые слова: Σ^0_{n+2}-вычислимая нумерация, нумерация Фридберга, арифметическая иерархия.

Тірек сөздер: Σ^0_{n+2}-есептелімді нөмірлеу, Фридберг нөмірлеуі, арифметикалық иерархия.

Keywords: Σ^0_{n+2}-computable numbering, Friedberg numbering, arithmetical hierarchy.

Нумерация $\nu : \omega \mapsto F$ семейства одноместных вычислимых функций называется вычислимой, если бинарная функция $\nu(n)(x)$ является вычислимой, [1]. Нумерацией Фридберга какого-либо семейства называется произвольная вычислимая взаимно однозначная нумерация. Известно, что полурешетка Роджерса вычислимого семейства F либо состоит из одного элемента, либо из бесконечного числа элементов, [1]; а также, что в нетривиальном случае она никогда не является решеткой и не имеет максимальных элементов, и содержит либо один, либо бесконечно много минимальных элементов, [2].

Мы обобщили понятие вычислимой нумерации для семейств функций в арифметической иерархии согласно [3]. Пусть F – семейство всюду определенных одноместных функций из Σ^0_{n+1}, $n \in \omega$. Тогда нумерация $\nu : \omega \mapsto F$ называется Σ^0_{n+1}-вычислимой, если бинарная функция $\nu(n)(x)$ является вычислимой относительно оракула $\emptyset^{(n)}$ [3].

ТЕОРЕМА. Пусть $F \subseteq \Sigma^0_{n+2}$ – бесконечное Σ^0_{n+2}-вычислимое семейство всюду определенных функций. Тогда F имеет бесконечное число попарно неэквивалентных нумераций Фридберга.

Доказательство. Разделим утверждение теоремы на две леммы и последовательно докажем их.

Лемма 1. Пусть $F \subseteq \Sigma^0_{n+2}$ – бесконечное Σ^0_{n+2}-вычислимое семейство всюду определенных функций. Если F имеет $0^{(n+1)}$-вычислимую нумерацию, тогда F имеет $0^{(n+1)}$-вычислимую нумерацию Фридберга.

Доказательство. Пусть $\alpha : \omega \mapsto F$ произвольная $0^{(n+1)}$-вычислимая нумерация семейства F, тогда существует $0^{(n+1)}$-вычислимая функция $G(n,x)$ такая, что $\alpha(n) = \lambda x G(n,x)$, где $n = 0,1,2,\ldots$.

Построим функцию f следующим образом: на шаге 1 положим $f(0) = 0$ (т.е. присвоим для $f(0)$ номер первой функций в нумераций α). На шаге k+1 будем искать номер функций, отличной от уже обнаруженных, сравнивая одновременно следующие функций

$$G(0,0),\ G(0,1),\ \ldots,\ G(0,k),$$
$$G(1,0),\ G(1,1),\ \ldots,\ G(1,k),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$G(k,0),\ G(k,1),\ \ldots,\ G(k,k),$$

(т.е. сравнивая k+1 начальных функций на k+1 начальных аргументах). Тем самым будем присваивать функции f α-номера попарно различных функций $G(n,x)$. Очевидно, что данная функция f будет 1-1 функцией, и так как функция $G(n,x)$ $0^{(n+1)}$-вычислима, то и сравнение конечного числа данных функций на конечном числе аргументов также будет $0^{(n+1)}$-вычислимой. Следовательно, функция f тоже будет $0^{(n+1)}$-вычислимой.

Тогда нумерация $\beta = \alpha \circ f$ (т.е. $\beta(n) = \lambda x F(f(n),x)$) будет $0^{(n+1)}$-вычислимой нумерацией Фридберга. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Пусть $F \subseteq \Sigma^0_{n+2}$ – бесконечное Σ^0_{n+2}-вычислимое семейство всюду определенных функций. Если F имеет Σ^0_{n+2}-вычислимую нумерацию Фридберга, тогда F имеет бесконечно много попарно неэквивалентных нумераций Фридберга.

Доказательство. Пусть $\alpha : \omega \mapsto F$ Σ^0_{n+2}-вычислимая нумерация Фридберга, K – креативное множество: $K = \{x : x \in W_x\}$. Упорядочим элементы K и $\overline{K}$ в порядке возрастания:

$$K = \{a_0 < a_1 < a_2 < \ldots\} \text{ и } \overline{K} = \{b_0 < b_1 < b_2 < \ldots\},$$

и определим $0'$-вычислимую перестановку p следующим образом: $p(a_{i+1}) = a_i$, $p(a_0) = b_0$, $p(b_i) = b_{i+1}$, где $i = 0,1,2,\ldots$.

Заметим, что p не является вычислимой перестановкой, так как в противном случае последовательность $p(a_0), p(p(a_0)), p(p(p(a_0))),\ldots$ оказалось бы вычислимым перечислением множества $\overline{K}$.

Очевидно, что каждая нумерация из системы

$$\begin{cases} \alpha \circ p, \\ \alpha \circ p^2, \\ \alpha \circ p^3, \\ \vdots \end{cases} \tag{1}$$

будет Σ^0_{n+2}-вычислимой нумерацией Фридберга и нам остается установить не эквивалентность любых двух нумерации из (1). Прежде заметим, что для любого $n \geq 1$ перестановка p^n будет не вычислимой, так как в противном случае последовательность (в которой участвуют элементы $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$)

$$p^n(a_{n-1}) = b_0, p^n(a_{n-2}) = b_1, \ldots, p^n(a_0) = b_{n-1},\ p^n(p^n(a_{n-1})) = b_n,$$
$$p^n(p^n(a_{n-2})) = b_{n+1},\ \ldots, p^n(p^n(a_0)) = b_{2n-1}, \ldots$$

определила бы вычислимое перечисление множества $\overline{K}$.

Если $n > k$, то $\alpha \circ p^n \not\leq \alpha \circ p^k$. На самом деле, если бы $\alpha \circ p^n \leq \alpha \circ p^k$, то существовала бы вычислимая функция h такая, что $\alpha \circ p^n = \alpha \circ p^k \circ h$, но так как $\alpha \circ p^k$-взаимно однозначная функция, то должно быть $p^{n-k} = h$, что невозможно в связи с тем, что в этом случае не вычислимая перестановка p^{n-k} была бы вычислимой функцией h. Следовательно, $\alpha \circ p^n \neq \alpha \circ p^k$, при $n \neq k$, так как $\alpha \circ p^n = \alpha \circ p^k$ тогда и только тогда, когда $\alpha \circ p^n \leq \alpha \circ p^k$ и $\alpha \circ p^n \geq \alpha \circ p^k$. Тем самым, мы построили бесконечную последовательность попарно неэквивалентных нумераций Фридберга. Лемма 2 доказана.

Из леммы 1 и леммы 2 непосредственно следует утверждение теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1 Ершов Ю.Л. Теория нумераций. – М.: Наука, 1977. – 416 с.

2 Марченков С.С. О вычислимых нумерациях семейств общерекурсивных функций // Алгебра и логика. – 1972. – Т. 11, № 5. – С. 588-607.

3 Badaev S.A., Goncharov S.S. Rogers semilattices of families of arithmetic sets // Algebra and logic. – 2001. – Vol. 40, N 5. – P. 283-291.

REFERENCES

1 Ershov Ju.L. Teorija numeracij. M.: Nauka, **1977**. 416 s. (in Russ.)

2 Marchenkov S.S. O vychislimyh numeracijah semejstv obshherekursivnyh funkcij. Algebra i logika. **1972**. T. 11, №5. S. 588-607. (in Russ.)

3 Badaev S.A. and Goncharov S.S. Rogers semilattices of families of arithmetic sets. Algebra and logic. **2001**. Vol. 40, N 5. P. 283-291.

Резюме

Ас. А. Исахов

(Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан Республикасы)

АРИФМЕТИКАЛЫҚ ИЕРАРХИЯДАҒЫ БАРЛЫҚ ЖЕРДЕ АНЫҚТАЛҒАН ФУНКЦИЯЛАР ҮЙІРІНІҢ ФРИДБЕРГ НӨМІРЛЕУЛЕРІ

Арифметикалық иерархиядағы функциялар үйірі үшін есептелімді нөмірлеу ұғымын жалпылау негізінде, шексіз Σ^0_{n+2}-есептелімді барлық жерде анықталған функциялар үйірінің бір-біріне эквивалент емес шексіз Фридберг нөмірлеулері бар екені дәлелденген.

Тірек сөздер: Σ^0_{n+2}-есептелімді нөмірлеу, Фридберг нөмірлеуі, арифметикалық иерархия.

Summary

As. A. Issakhov

(Al-Farabi Kazakh national university, Almaty, Republic of Kazakhstan)

FRIEDBERG NUMBERINGS OF THE FAMILY OF TOTAL FUNCTIONS IN THE ARITHMETICAL HIERARCHY

On the basis of a generalized notion of computable numbering for the families of functions in the arithmetical hierarchy, it has been proved that an infinite Σ^0_{n+2}-computable family of total functions has infinitely many pairwise nonequivalent Friedberg numberings.

Keywords: Σ^0_{n+2}-computable numbering, Friedberg numbering, arithmetical hierarchy.

Поступила 15.01.2014г.