

Ж. ИСКАКОВ

ТІК ҚАТАҢ ТЕҢГЕРЛМЕГЕН ГИРОСКОПТЫҚ РОТОРДЫҢ СЫЗЫҚТЫ ЕМЕС РЕЗОНАНСТЫҚ ТЕРБЕЛІСТЕРІНІҢ ОРНЫҚТЫЛЫҒЫ

Алматы энергетика және байланыс университеті, Алматы қ.

Дискісінің массасының дисбалансы және еңкіштігі бар тік қатаң гироскоптық ротор қарастырылады. Ротордың динамикалық моделін құру мақсатында ротордың кинетикалық энергиясының, Рэлейдің сызықты емес функциясының, серпімді тірегінің геометриялық сызықты емес сипаттамасы ескерілген потенциалдық энергиясының, сыртқы күштер моменттерінің өрнектері табылады және Лагранж түріндегі қозғалыс теңдеулері жазылады. Тербелістің орнықтылығын зерттеу үшін олардың негізінде вариациялық түрдегі, мұнан әрі Хилл типіндегі теңдеулер құрылады. Флоке теориясына сәйкесті шешімдері бұл теңдеулерге қойылып, гармоникалық баланс әдісі пайдаланылып, орнықтылық критерийі табылады. Ротордың резонанстық орнықсыздық облысы графикалық анықталады және оған дисбаланстар бағдарлары арасындағы бұрыштың, дискінің қалыңдығының және сызықтық еместік шамасының әсері зерттеледі.

Әртүрлі роторлық машиналардың тербелістеріне және орнықтылығына дискінің еңкіштігі мен массаның дисбалансының біріккен әсері – түбегейлі зерттелмеген мәселелердің бірі болып келеді. [1-4] жұмыстарында геометриясы әртүрлі роторлардың қалыптасқан сызықты тербелістеріне дискінің еңкіштігі мен массаның дисбалансының біліктің консолдық шамасының, дискінің симметриялы емес орналасу шамасының, сыртқы үйкеліс коэффициентінің әсері зерттеледі, нәтижесінде прецессия жасаушы ротордың ерекше фазалық-жиілік сипаттамасы болады, мұнымен бірге кіші айналу жиіліктерінде тербеліс фазасы дисбаланс бағдарына сәйкес келуі міндетті емес екен [6] жұмыста [5] жұмыстың зерттеу әдістемесі бас гармоникалық және субгармоникалық тербелістерді зерттеу үшін пайдаланылады. Алдыңғы жұмыстардан ерекшелігі субгармоникалық резонанстық тербелістер түбегейлі зерттеледі, бас және субрезонанстарға сәйкесті орнықсыздық облыстары анықталады [7] жұмыста еркіншілік дәрежесі бірге тең сызықты емес жүйенің гармоникалық және субгармоникалық тербелістеріне және орнықтылығына сызықты емес тұтқыр үйкелістің әсері қарастырылады. Берілген жұмыста тік қатаң гироскоптық ротордың резонанстық тербелістерінің орнықтылығына дисбаланстар бағдарлары арасындағы бұрыштың, диск қалыңдығының және серпімді тірегінің сызықты емес параметрінің әсері зерттеледі.

1-суретте ротордың геометриялық сұлбасы ұсынылған. Ұзындығы L және қатаңдығы EI білік төменгі шарнирлі және онан ℓ_0 қашықтықтағы жоғарғы серпімді тіректің көмегімен тік орнатылған. Біліктің бос ұшына массасы m (салмағы G) үйектік инерция моменті I_p және кез келген бағыт үшін бірдей көлденең инерция моменті I_T болатын диск бекітілген. Біліктің ω айналу жылдамдығы соншалықты үлкендіктен роторды қозғалмайтын нүктесі біліктің төменгі нүктесі болатын гироскоп деп қарастыруға болады. Дискінің геометриялық центрі S x , y координаталарымен, ал біліктің және толығымен ротордың кеңістіктегі орны θ_x , θ_y бұрыштарымен және $\varphi = \omega t$ бұрылу бұрышымен анықталады. Сызықты эксцентриситет e SX осінде жатыр, бұрыштық τ эксцентриситеттен β бұрышына қалады деп ұйғарамыз. Ротор білігінің кіші ауытқуларымен шектелеміз, сол себепті есептеулерде e , τ , θ_x , θ_y , x , y аз шамаларына қатысты сызықты мүшелерді ғана ескереміз. Серпімді тіректің қаттылық коэффициенті k_1 және серпімділік күшінің сызықты емес мүшесінің коэффициенті k_2 . Сыртқы демпферлеу коэффициенті μ_e . Жүйенің кинетикалық және потенциалдық энергияларының, Рэлей функциясының, сыртқы күштердің моменттерінің өрнектерін жазып Лагранж формасында ротордың қозғалыс теңдеулерін құрамыз. Өлшемсіз параметрлерді келесі формулалар

$$\varepsilon = e/L; \ell = \ell_0/L; \bar{I} = I(2EI/mL^3)^{1/2}; \Omega = \omega(mL^3/2EI)^{1/2}; \bar{I}_p = I_p/mL^2; \bar{I}_T = I_T/mL^2; \\ K_1 = k_1(L^3/EI), K_2 = k_2(L^5/EI), P = G(L^2/EI), \mu = \mu_e(1/EImL), \quad (1)$$

көмегімен ендіріп, теңдеулердің оң жақтарында

$$M = \sqrt{[(\Omega^2 + P)\varepsilon + H\tau\Omega^2 \cos \beta]^2 + H\tau^2\Omega^4 \sin^2 \beta} \quad (2)$$

- мәжбүрлеуші моменттің амплитудасы өрнегінің және оның

$$\gamma = \arctg \frac{H\tau\Omega^2 \sin \beta}{(\Omega^2 + P)\varepsilon + H\tau\Omega^2 \cos \beta} \quad (3)$$

- бастапқы фазасы өрнегінің белгілеулерін пайдаланып бір ғана гармониялық функциялармен өрнектеп қозғалыс теңдеулеріне ықшам түр беруге болады

$$(1 + \bar{I}_T)\theta_x'' + \bar{I}_p\Omega\theta_y' + \mu\theta_x' + (K_1\ell^2 - P)\theta_x + K_2\ell^4\theta_x^3 = M \cos(\Omega\bar{t} + \gamma), \quad (4)$$

$$(1 + \bar{I}_T)\theta_y'' - \bar{I}_p\Omega\theta_x' + \mu\theta_y' + (K_1\ell^2 - P)\theta_y + K_2\ell^4\theta_y^3 = M \sin(\Omega\bar{t} + \gamma), \quad (5)$$

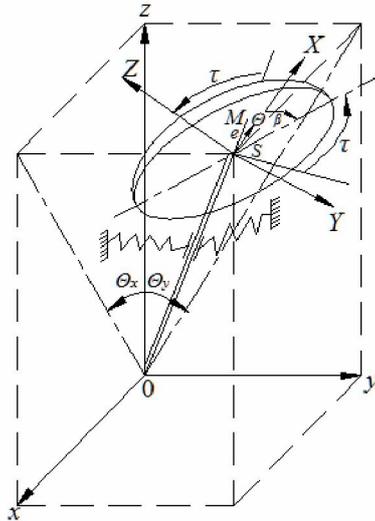
Бұл жерде $H = \bar{I}_p - \bar{I}_T$ – дискінің шартты қалыңдығы.

Мәжбүрлеуші моменттің жиілігіне тең тербеліс жиілігіндегі қарапайым гармониканың негізгі резонансы жағдайында (4)-(5) теңдеулерінің шешімдерін жуықтау

$$\theta_x = A_1 \cos(\Omega\bar{t} - \alpha_1) \quad (6)$$

$$\theta_y = A_1 \sin(\Omega\bar{t} - \alpha_1) \quad (7)$$

теңдеулерін қанағаттандырады.



1-сурет. Ротордың геометриясы

Орнықтылық мәселесін шешу үшін периодты тепе-теңдік күйден $\delta\theta_x$ және $\delta\theta_y$ ауытқуларын қарастырамыз және (4), (5) теңдеулеріндегі θ_x және θ_y шамаларын $\theta_{x0} + \delta\theta_x$ және $\theta_{y0} + \delta\theta_y$ шамаларымен ауыстырамыз. Бұл жерде θ_{x0} және θ_{y0} (4), (5) теңдеулерінің орнықтылығы зерттелетін шешімдері. Мұнан әрі [5, 6] әдістемесі бойынша $\delta\theta_x$ және $\delta\theta_y$ бірден жоғары дәрежелерін елемей $\delta\theta_x$ және $\delta\theta_y$ вариацияларына қатысты теңдеулерді аламыз

$$(1 + I_T)\frac{d^2\delta\theta_x}{dt^2} + I_p\Omega\frac{d\delta\theta_y}{dt} + \mu\frac{d\delta\theta_x}{dt} + [(K_1I^2 - P) + 3K_2I^4\theta_{x0}^2]\delta\theta_x = 0, \quad (8)$$

$$(1 + I_T)\frac{d^2\delta\theta_y}{dt^2} - I_p\Omega\frac{d\delta\theta_x}{dt} + \mu\frac{d\delta\theta_y}{dt} + [(K_1I^2 - P) + 3K_2I^4\theta_{y0}^2]\delta\theta_y = 0. \quad (9)$$

$\delta\theta_x$ және $\delta\theta_y$ шамаларының уақыт бойынша сипаты сәйкесті $\theta_{x0}(\tau)$ және $\theta_{y0}(\tau)$ шешімдерінің орнықтылығын анықтайды: егер (8) және (9) теңдеулерінің барлық $\delta\theta_x$ және $\delta\theta_y$ шешімдері

$\tau \rightarrow \infty$ кезінде шектелсе, онда анықтама бойынша $\theta_{x_0}(\tau)$ және $\theta_{y_0}(\tau)$ шешімдері орнықты, егер $\delta\theta_x$ және $\delta\theta_y$ шамалары $\tau \rightarrow \infty$ кезінде шектеусіз артса, онда $\theta_{x_0}(\tau)$ және $\theta_{y_0}(\tau)$ шешімдері Ляпунов бойынша орнықсыз.

$$\delta\theta_x = e^{-0,5\mu t} \xi \quad \text{және} \quad \delta\theta_y = e^{-0,5\mu t} \eta \quad (10)$$

түрлендірулерін пайдаланып және θ_{x_0} және θ_{y_0} шамаларын олардың (6) және (7) жіктелулерімен алмастырып Хилл типіндегі теңдеулерге келтіреміз

$$(1 + I_T) \frac{d^2 \xi}{dt^2} - \mu I_T \frac{d\xi}{dt} + (\theta_{01} + \theta_{2C} \cos 2\Omega t + \theta_{2S} \sin 2\Omega t) \xi + I_P \Omega \frac{d\eta}{dt} - \frac{1}{2} \mu I_P \Omega \eta = 0, \quad (11)$$

$$(1 + I_T) \frac{d^2 \eta}{dt^2} - \mu I_T \frac{d\eta}{dt} + (\theta_{01} + \theta_{2C} \sin 2\Omega t - \theta_{2S} \cos 2\Omega t) \eta - I_P \Omega \frac{d\xi}{dt} + \frac{1}{2} \mu I_P \Omega \xi = 0, \quad (12)$$

мұндағы

$$\begin{aligned} \theta_{01} &= \frac{1}{4}(1 + I_T) \mu^2 - \frac{1}{2} \mu + (K_1 I^2 - P) + \frac{2}{3} K_2 I^4 A_1^2; \\ \theta_{2C} &= \frac{2}{3} K_2 I^4 A_1^2 \cos 2\alpha_1; \\ \theta_{2S} &= \frac{2}{3} K_2 I^4 A_1^2 \sin 2\alpha_1 - \end{aligned} \quad (13)$$

A_1, α_1 аргументтерінен қайсыбір функциялар. Флоке теориясына сәйкесті (11) және (12) теңдеулерінің дербес шешімдерін мына түрде іздейміз

$$\xi = e^{\lambda t} a_1 \cos(\Omega t - \delta_1), \quad (14)$$

$$\eta = e^{\lambda t} a_1 \sin(\Omega t - \delta_1), \quad (15)$$

мұндағы λ – сипаттамалық көрсеткіш (нақты немесе жорымал).

(10), (14) және (15) қатыстарын талдаудан шығатыны: θ_{x_0} және θ_{y_0} шешімдерінің орнықтылық шарттары келесі түрде болады

$$\operatorname{Re} \left(\lambda - \frac{\mu}{2} \right) < 0, \quad (16)$$

ал орнықты және орнықсыз облыстар шекарасында

$$\operatorname{Re} \left(\lambda - \frac{\mu}{2} \right) = 0. \quad (17)$$

λ сипаттамалық көрсеткіші нақты болуы мүмкін немесе таза жорымал болуы мүмкін, онда (16) шарты келесі шартқа баламалы

$$\frac{\mu}{2} > 0 \quad \text{және} \quad \left(\frac{\mu}{2} \right)^2 > \lambda^2.$$

(14) және (15) шешімдерін (11) және (12) теңдеулеріне қойып, гармоникалық баланс әдісін пайдаланып, яғни бірдей жиіліктер жанындағы коэффициенттерді теңестіріп, нәтижесінде a_1 және α_1 шамаларының кез келген мардымсыз емес шешімдерінде қанағаттандырылатын біртекті теңдеулер жүйесін аламыз. Сондықтан оның коэффициенттерінен құралған сипаттауыш анықтауыш нөлге айналуы қажет. Бұл анықтауыш λ шамасынан тәуелді. Сонымен,

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} (1 + I_T)(\lambda^2 - \Omega^2) - \mu I_T \lambda + \theta_{01} + \frac{1}{2} \theta_{2C} + I_P \Omega^2; & -2(1 + I_T) \Omega \lambda + \mu I_T \Omega + \frac{1}{2} \theta_{2S} + I_P \Omega \lambda - \frac{1}{2} \mu I_P \Omega; \\ 2(1 + I_T) \Omega \lambda - \mu I_T \Omega + \frac{1}{2} \theta_{2S} - I_P \Omega \lambda + \frac{1}{2} \mu I_P \Omega; & (1 + I_T)(\lambda^2 - \Omega^2) - \mu I_T \lambda + \theta_{01} - \frac{1}{2} \theta_{2C} + I_P \Omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (18)$$

(16)-(17) шарттарынан шығатыны:

орнықтылық облысы мен орнықсыздық облысы шекарасында $\Delta\left(\frac{\mu}{2}\right) = 0$ және орнықтылық облысында $\Delta\left(\frac{\mu}{2}\right) > 0$.

Жоғарыда көрсетілген анықтауышты ашып және (17) өрнегін ескеріп резонанстық қисықтағы орнықсыздық облысының шекарасын анықтайтын қатысты аламыз:

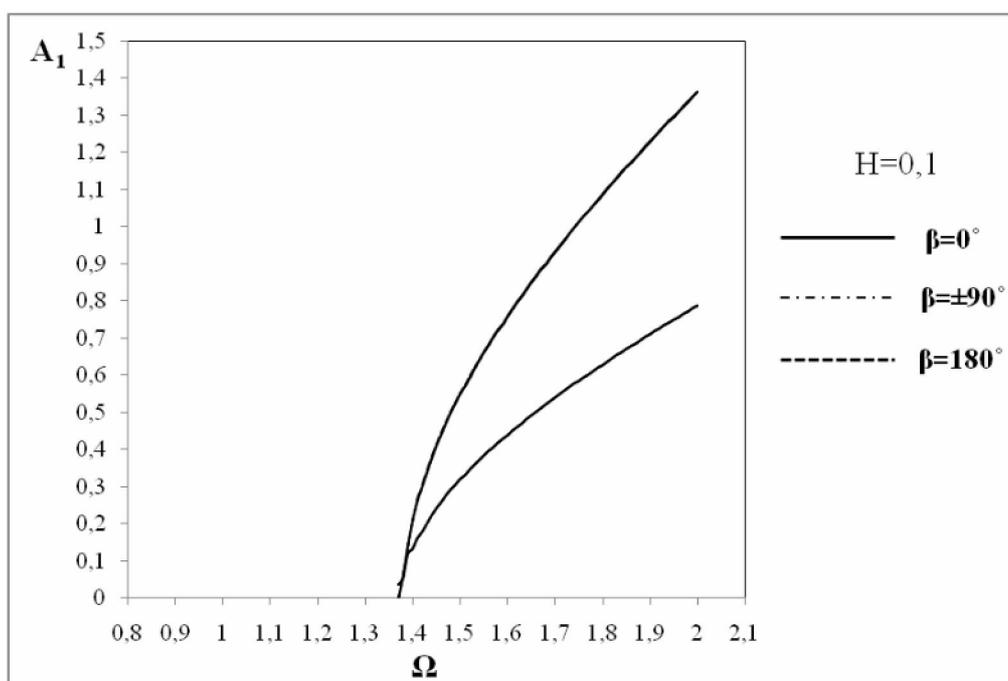
$$R(A_1, \alpha_1, \Omega, \mu, K_2, H, \beta) = [0,25(1+I_T)\mu^2 - 0,5\mu^2 I_T - (1-H)\Omega^2 + \theta_{01}]^2 + [0,5(2+2I_T - I_p)\Omega\mu + \mu\left(\frac{1}{2}I_p - I_T\right)\Omega]^2 - \frac{1}{4}(\theta_{2c}^2 + \theta_{2s}^2) = 0. \quad (19)$$

Бұл кезде орнықтылық облысы

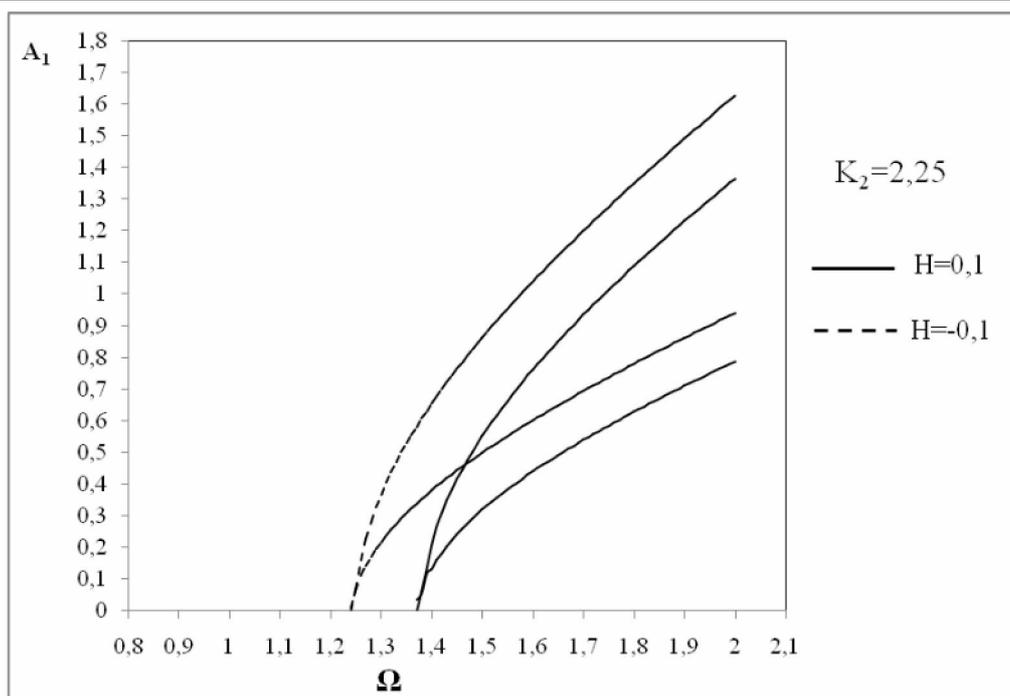
$$R > 0 \quad (20)$$

теңсіздігімен сипатталады.

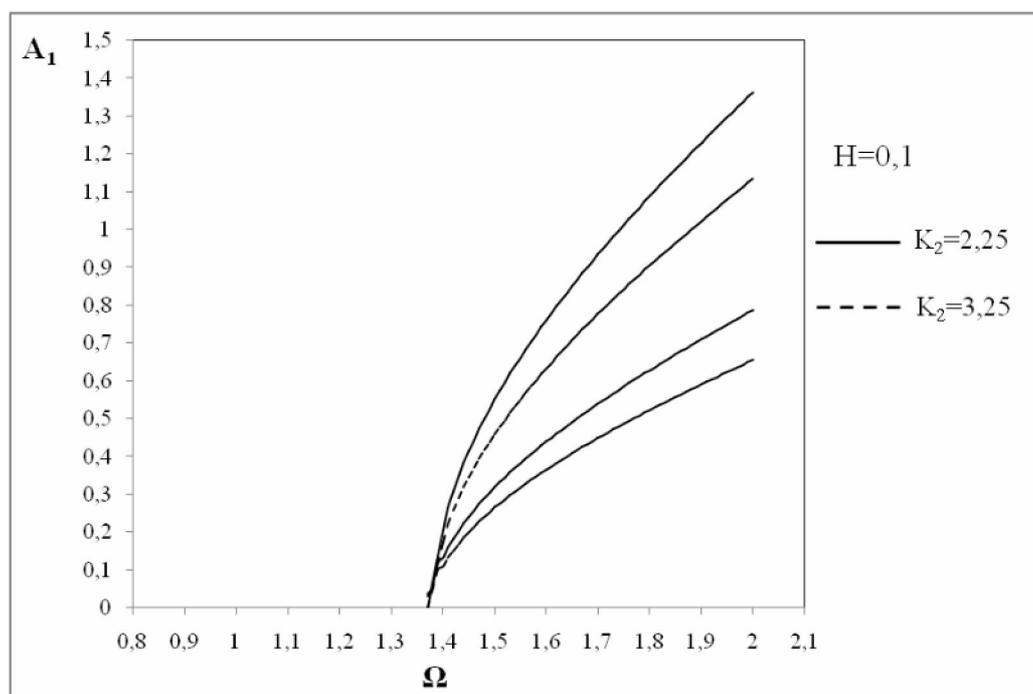
(19) теңдеу ротордың келесі параметрлері: $H = +0,1(\bar{I}_p = 1,008; \bar{I}_T = 0,909)$, $H = -0,1(\bar{I}_p = 0,909; \bar{I}_T = 1,008)$, $K_2 = 2,25$; $\beta = 0^\circ, \pm 90^\circ, 180^\circ$; $K_1 = 2,25$; $\ell = 0,88$; $P = 0,02$; $\mu_e = 0,01$; $\varepsilon = 0,01$; $\tau = 0,02$; $\Omega = 0,8 \div 2$ үшін электрондық есептеуіш машинасында «Maple 11» символдық есептеулер жүйесінде сандық шешілді. Сандық есептеулер нәтижелерінен және 2-суреттен резонанстық орнықсыздық облысы шекараларының дисбаланстар бағдарлары арасындағы бұрыштан әлсіз байланыста болатындығын байқаймыз. 3-суреттен ротордың дискісінің қалыңдығының резонанстық орнықсыздық облысының орналасуына және оның еніне әсер ететінін көреміз. Бірдей айналу бұрыштық жылдамдығында жұқа дискілі ротордың орнықсыздық облысының ені қалың дискілі ротордікімен салыстырғанда кіші болады екен. 4-суреттегі графиктер сызықты еместік шамасының артуымен резонанстық орнықсыздық облысы төмен қарай ығысып, ені кішірейетіндігін көрсетеді.



2-сурет. Негізгі резонанстық орнықсыздық облысы шекарасына дисбаланстар бағдарлары арасындағы бұрыштың әсері. Жұқа дискі жағдайы



3-сурет. Негізгі резонанстық орнықсыздық облысы шекарасына диск қалыңдығының әсері



4-сурет. Негізгі резонанстық орнықсыздық облысы шекарасына сызықты еместік шамасының әсері. Жұқа дискі жағдайы

Құрылғының параметрлері ротордың орнықсыздық облысының өрнегіне (19) енеді екен. Оларды өзгерте отырып, резонанстық құбылысты шығарып тастайтындай ротордың тиімді жұмыс режимін таңдап алуымызға болады. Сонымен, ротордың диск қалыңдығының, масса дисбалансы мен еңкіштігінің, олардың өзара бағдарлануының, серпімді тірегінің сызықты емес параметрінің, сол сияқты тұтқыр үйкелістің машинаның бас резонанстық тербелістерінің орнықтылығына зерттеу нәтижелері ротордың қауіпсіз жұмыс жасайтын жылдамдықтар облысын анықтауға, жүйенің сенімді жұмыс істеуі үшін тиімді параметрлерін табуға мүмкіндік береді.

ӘДЕБИЕТ

- 1 Бенсон. Установившиеся колебания консольного ротора с перекосом и дисбалансом диска // Конструирование и технология машиностроения. – 1983. – Т. 105, № 4. – С. 35-40.
- 2 Искаков Ж. Установившиеся колебания двух опорного консольного ротора с перекосом и дисбалансом диска. // Доклады АН. – 2008. – № 1. – С. 18-25.
- 3 Тулепов А.К., Искаков Ж., Калыбаева А.К. Динамика вертикального гироскопического ротора с перекосом диска и дисбалансом массы. // Вестник КазНПУ им. Абая. Сер. физ.-мат. наук. – 2010. – № 3(31). – С. 184-194.
- 4 Төлешов А.К., Искаков Ж., Калыбаева А.К. Массасының дисбалансы мен дискісінің еңкіштігі бар бейсимметриялық ротордың орныққан тербелістері. // Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университетінің Хабаршысы. – 2010. – № 4(67). – Б. 264-271.
- 5 Хаяси Т. Нелинейные колебания в физических системах. – М.: Мир, 1968.
- 6 Szemplinska-Stupnicka W. Higher harmonic oscillations in heteronomous nonlinear systems with one degree of freedom // Internal. J. Nonlinear Mech. – 1968. – Vol. 3, N 1. – P. 17-30.
- 7 Кыдырбекулы А.Б. Колебания и устойчивость роторных систем и плоских механизмов с нелинейно-упругими характеристиками: Дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. – Алматы, 2011. – 271 с.

REFERENCES

1. *Benson*. Ustanovivshiesya kolebaniya konsol'nogo rotora s perekosom i disbalansom diska // Konstruirovaniye i tehnologiya mashinostroeniya. – 1983.-T.105, №4. – С.35-40.
2. *Iskakov ZH*. Ustanovivshiesya kolebaniya dvuh opornogo konsol'nogo rotora s perekosom i disbalansom diska. // Doklady Akademii nauk Respubliki Kazakhstan. – 2008. -№ 1. – С.18 – 25.
3. *Tuleshov A.K., Iskakov ZH., Kalibaeva A.K.* Dinamika vertikal'nogo geroskopicheskogo rotora s perekosom diska i disbalansom massy. // Vestnik KazNPU imeni Abaya. Seriya fiziko – matematicheskikh nauk. – Almaty, 2010. - № 3 (31). - С. 184 – 194.
4. *Toleshov A.K., Iskakov ZH., Kalibaeva A.K.* Massasinin disbalansi men diskisinin enkishtigi bar beysimetriyalik rotordyn ornykkan terbelisteri. // All-Farabi atyndagy Kazak Ul'tyik Universitetinin Habarshysy. – Almaty, 2010. -№ 4(67). – Б. 264 – 271.
5. *Hayasi T.* Nelineynie kolebaniya v fizicheskikh sistemah. М.: Mir, 1968.
6. *Szemplinska-Stupnicka W.* Higher harmonic oscillations in heteronomous nonlinear systems with one degree of freedom //Internal.J.Nonlinear Mech.-1968.-Vol.3, N1.-P.17-30.
7. *Kidirbekuli A.B.* Kolebaniya istoychivost' rotornih system i ploskih mehanizmov s nelieyno-uprugimi haraktersitikami: Dis. Dokt. tehn. nauk:01.02.06.- Almaty, 2011.-271s.

Ж. Искаков

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕЗОНАНСНОГО КОЛЕБАНИЯ
ВЕРТИКАЛЬНОГО ЖЕСТКОГО ГИРОСКОПА

Рассматривается вертикальный жесткий гироскопический ротор, у которого диск имеет перекос и дисбаланс массы. С целью построения динамической модели машины найдены выражения кинетической энергии, нелинейной функции Рэлея, потенциальной энергии ротора с учетом геометрически нелинейной характеристики упругой опоры, моменты внешних сил и составлены уравнения движения в форме Лагранжа. Для исследования устойчивости на их основе записываются уравнения в вариациях, а затем уравнения типа Хилла. В соответствии с теорией Флоке решения ставятся в эти уравнения и используя метод гармонического баланса находится критерий устойчивости. Графически определяется область резонансной неустойчивости и исследуется влияние на нее угла между ориентациями дисбалансов, толщины диска и величины нелинейности.

Zh. Iskakov

TIK QATAŇ TEŇGERILMEGEN GIROSKOPTYQ ROTORDYŇ SYZYQTY EMES
REZONANSTYQ TERBELISTERINIŇ ORNYQTYLYGY

A vertical hard gyroscopic rotor at that a disk has a defect and disbalance of mass is examined. For complete description of motion of rotor the dynamic model of machine is built. Expressions of kinetic energy, nonlinear function of Рэлея are found for this purpose, to potential energy of rotor taking into account geometrically nonlinear description of resilient support, moments of external forces and worked out equations of motion in form Lagrange. For research of stability on their basis equalizations are written down in variations, and then equalizations of type of Hill. In accordance with the theory of Floke of decision put in these equalizations and using the method of harmonic balance to be criterion of stability. The area of resonant instability is graphically determined and influence is investigated on her corner between the orientations of disbalances, thickness of disk and size of non-linearity.