

# Механика

УДК 621.01: 517. 957

Ж. ИСКАКОВ

## УСТОЙЧИВОСТЬ НЕУРАВНОВЕШЕННОГО ГИРОСКОПИЧЕСКОГО РОТОРА С МЯГКОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ УПРУГОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ ПРИ РЕЗОНАНСНЫХ КОЛЕБАНИЯХ

(Алматинский университет энергетики и связи, Алматы)

Исследуется устойчивость неуравновешенного вертикального жесткого гироскопического ротора с мягкой нелинейной упругой характеристикой при резонансных колебаниях. Для этого составляются уравнения движения в форме Лагранжа на основе выражений кинетической энергии, нелинейной функции Рэлея, потенциальной энергии ротора с учетом физически нелинейной характеристики упругой опоры, моментов внешних сил. Затем записываются уравнения в вариациях и уравнения для устойчивости типа Хилла. В соответствии с теорией Флоке решения ставятся в эти уравнения и, используя метод гармонического баланса, находится критерий устойчивости. Графически определяется область резонансной неустойчивости и исследуется влияние на нее угла между ориентациями дисбалансов, толщины диска и величины нелинейности.

На рисунке 1 представлена геометрическая схема ротора. Вал с длиной относительно малых величин  $e, \tau, \theta_x, \theta_y$ . Коэффициент внешнего демпфирования  $\mu_e$ .

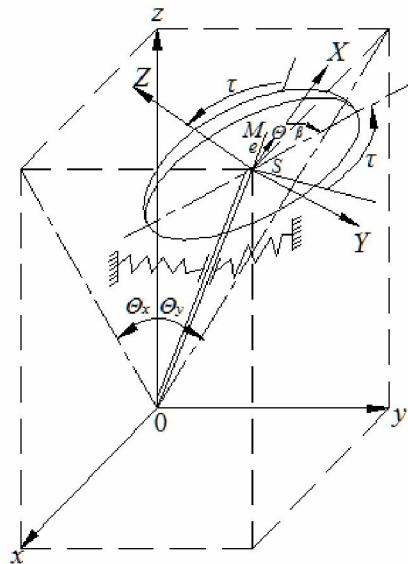


Рис.1. Геометрия ротора

$L$  и жесткостью  $EI$  установлен вертикально с помощью нижней шарнирной и отстоящей от нее на расстояние  $l_0$  верхней упругой опоры. Коэффициент жесткости упругой опоры  $k_1$ , коэффициент при нелинейном члене силы упругости  $k_2$ . На свободном конце вала закреплен диск, имеющий массу  $m$  (вес  $G$ ) полярный момент инерции  $I_p$  и поперечный момент инерции  $I_T$ , одинаковый для любого направления. Скорость вращения вала  $\omega$  настолько большая, что ротор можно рассматривать как гироскоп, неподвижной точкой которого является нижняя опора вала.

Так как вал является достаточно жестким, его положение и геометрического центра диска  $S$  определяется углами  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  и углом поворота  $\varphi = \omega t$ . Предполагаем также, что линейный эксцентриситет  $e$  лежит на оси  $SX$  и отстает от плоскости углового эксцентриситета  $\tau$  на угол  $\beta$ . Ограничимся малыми отклонениями оси ротора, поэтому будем учитывать в вычислениях члены линейные.

Путем составления выражений кинетической энергии и потенциальной энергии системы с учетом мягкой нелинейной характеристики упругой опоры, диссипативной функции, моментов внешних сил построены уравнения движения ротора в форме Лагранжа.

Введя следующие безразмерные параметры

$$\begin{aligned} \varepsilon &= e/L; \ell = \ell_0/L; \bar{t} = t(2EI/mL^3)^{1/2}; \Omega = \omega(mL^3/2EI)^{1/2}; \bar{I}_p = I_p/mL^2; \bar{I}_T = I_T/mL^2; \\ K_1 &= k_1(L^3/EI), K_2 = k_2(L^5/EI), P = G(L^2/EI), \mu = \mu_e(1/E\text{Im}L), \end{aligned} \quad (1)$$

и используя обозначения выражений амплитуды

$$M = \sqrt{[(\Omega^2 + P)\varepsilon + H\tau\Omega^2 \cos\beta]^2 + H\tau^2\Omega^4 \sin^2\beta} \quad (2)$$

и начальной фазы

$$\gamma = \arctg \frac{H\tau\Omega^2 \sin\beta}{(\Omega^2 + P)\varepsilon + H\tau\Omega^2 \cos\beta} \quad (3)$$

вынуждающего момента, выражая с одними гармоническими функциями, можно придать уравнениям движения компактный вид

$$(1 + \bar{I}_T) \theta''_x + \bar{I}_p \Omega \theta'_y + \mu \theta'_x + (K_1 \ell^2 - P) \theta_x + K_2 \ell^3 \theta_x^2 = M \cos(\Omega \bar{t} + \gamma), \quad (4)$$

$$(1 + \bar{I}_T) \theta''_y - \bar{I}_p \Omega \theta'_x + \mu \theta'_y + (K_1 \ell^2 - P) \theta_y + K_2 \ell^3 \theta_y^2 = M \sin(\Omega \bar{t} + \gamma), \quad (5)$$

где  $H = I_p - I_T$  – условная толщина диска.

Аппроксимация решений уравнений (4) и (5) в случае основного резонанса простой гармоникой с частотой колебаний, равной частоте возмущающего момента, удовлетворяет

$$\theta_x = A_1 \cos(\Omega \bar{t} - \alpha_1) \quad (6)$$

$$\theta_y = A_1 \sin(\Omega \bar{t} - \alpha_1) \quad (7)$$

После применения метода гармонического баланса[1,2] получаем амплитудно – и фазово-частотные зависимости

$$(K_1 \ell^2 - P)A_0 + K_2 \ell^3 A_0^2 + \frac{1}{2}(K_2 \ell^3)A_1^2 = 0, \quad (8)$$

$$\{(1 - H)(\Omega^2 - \omega_*^2)\}^2 + \mu^2 \Omega^2 A_1^2 = M^2, \quad (9)$$

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{(1 - H)(\Omega^2 - \omega_*^2)g\gamma + \mu \Omega}{-(1 - H)(\Omega^2 - \omega_*^2) + \mu \Omega g\gamma} \quad (10)$$

Здесь

$$\omega_*(A_0) = \sqrt{\frac{K_1 \ell^2 - P}{1 - H} + \frac{2K_2 \ell^3}{1 - H} A_0} = \sqrt{\left(\frac{K_1 \ell^2 - P}{1 - H}\right)^2 - 2\left(\frac{K_2 \ell^3}{1 - H}\right)^2 A_1^2} \quad (11)$$

-собственная частота гармонических колебаний бездемпфирной автономной системы.

Для решения вопроса об устойчивости рассмотрим малые отклонения  $\delta\theta_x$  и  $\delta\theta_y$  от периодических равновесных состояний в уравнениях(4),(5) заменяя величины  $\theta_x$  и  $\theta_y$  на  $\theta_{x0} + \delta\theta_x$  и  $\theta_{y0} + \delta\theta_y$ . Здесь  $\theta_{x0}$  и  $\theta_{y0}$  – периодические решения уравнений (4) и (5), устойчивость которых

подлежать исследованию. Далее, пренебрегая степенями  $\delta\theta_x$  и  $\delta\theta_y$  выше первой, получаем линейные уравнения относительно вариаций  $\delta\theta_x$  и  $\delta\theta_y$  [1,2]

$$(1+I_T) \frac{d^2\delta\theta_x}{dt^2} + I_p \Omega \frac{d\delta\theta_y}{dt} + \mu \frac{d\delta\theta_x}{dt} + [(K_1 l^2 - P) + 2K_2 l^4 \theta_{x0}] \delta\theta_x = 0, \quad (12)$$

$$(1+I_T) \frac{d^2\delta\theta_y}{dt^2} - I_p \Omega \frac{d\delta\theta_x}{dt} + \mu \frac{d\delta\theta_y}{dt} + [(K_1 l^2 - P) + 2K_2 l^4 \theta_{y0}] \delta\theta_y = 0. \quad (13)$$

Характер поведения величин  $\delta\theta_x$  и  $\delta\theta_y$  во времени определяет соответствующих решений  $\theta_{x0}(\tau)$  и  $\theta_{y0}(\tau)$ : если все решения  $\delta\theta_x$  и  $\delta\theta_y$  уравнений (12) и (13) ограничены при  $\tau \rightarrow \infty$ , то решения  $\theta_{x0}(\tau)$  и  $\theta_{y0}(\tau)$  по определению устойчивы; если величины  $\delta\theta_x$  и  $\delta\theta_y$  неограниченно растут при  $\tau \rightarrow \infty$ , то решения  $\theta_{x0}(\tau)$  и  $\theta_{y0}(\tau)$  по определению неустойчивы.

Используя преобразования

$$\delta\theta_x = e^{-0.5\mu t} \xi \text{ и } \delta\theta_y = e^{-0.5\mu t} \eta \quad (14)$$

и заменяя величины  $\theta_{x0}$  и  $\theta_{y0}$  их разложениями (6) и (7), приводим уравнения (12) и (13) к уравнениям типа Хилла:

$$(1+I_T) \frac{d^2\xi}{dt^2} - \mu I_T \frac{d\xi}{dt} + (\theta_0^{A0} + \theta_{1C}^{A1} \cos \Omega t + \theta_{1S}^{A1} \sin \Omega t) \xi + I_p \Omega \frac{d\eta}{dt} - \frac{1}{2} \mu I_p \Omega \eta = 0, \quad (15)$$

$$(1+I_T) \frac{d^2\eta}{dt^2} - \mu I_T \frac{d\eta}{dt} + (\theta_0^{A0} + \theta_{1C}^{A1} \sin \Omega t - \theta_{1S}^{A1} \cos \Omega t) \eta - I_p \Omega \frac{d\xi}{dt} + \frac{1}{2} \mu I_p \Omega \xi = 0, \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} \theta_0^{A0} &= \frac{1}{4} (1+I_T) \mu^2 - \frac{1}{2} \mu^2 + (K_1 l^2 - P) + 2K_2 l^4 A_0; \\ \theta_{1C}^{A1} &= 2K_2 l^4 A_1 \cos \alpha_1; \\ \theta_{1S}^{A1} &= 2K_2 l^4 A_1 \sin \alpha_1. \end{aligned} \quad (17)$$

некоторые функции от аргументов  $A_1, \alpha_1$ . Согласно теории Флоке, частные решения уравнений (14) и (15) ищем в виде

$$\xi = e^{\lambda t} a_1 \cos(\Omega t - \delta_1), \quad (18)$$

$$\eta = e^{\lambda t} a_1 \sin(\Omega t - \delta_1), \quad (19)$$

где  $\lambda$  – характеристический показатель (действительный или мнимый).

Из равенств (14), (18) и (19) непосредственно видно, что условия, определяющие устойчивость решений  $\theta_{x0}$  и  $\theta_{y0}$ , имеют вид

$$\operatorname{Re}\left(\lambda - \frac{\mu}{2}\right) < 0, \quad (20)$$

а на границе между областями устойчивости и неустойчивости

$$\operatorname{Re}\left(\lambda - \frac{\mu}{2}\right) = 0. \quad (21)$$

Поскольку характеристический показатель  $\lambda$  может быть или действительным, или чисто мнимым, то условие (20) эквивалентно следующему:

$$\frac{\mu}{2} > 0 \text{ и } \left(\frac{\mu}{2}\right)^2 > \lambda^2. \quad (22)$$

Подставляя решения (18) и (19) в уравнения (12) и (13) и применяя метод гармонического баланса, т.е. приравнивая друг другу коэффициенты при одинаковых частотах, получаем систему

линейных однородных уравнений, которая должна удовлетворяться при любых нетривиальных значениях величин  $a_1$  и  $\delta_1$ . Поэтому характеристический определитель, составленный из коэффициентов, должен обратиться в нуль. Этот определитель зависит от величины  $\lambda$ . Таким образом,

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} (1+I_T)(\lambda^2 - \Omega^2) - \mu I_T \lambda + \theta_0^{A0} + I_P \Omega^2; -2(1+I_T)\Omega\lambda + \mu I_T \Omega + I_p \Omega \lambda - \frac{1}{2}\mu I_P \Omega; \\ 2(1+I_T)\Omega\lambda - \mu I_T \Omega - I_p \Omega \lambda + \frac{1}{2}\mu I_P \Omega; (1+I_T)(\lambda^2 - \Omega^2) - \mu I_T \lambda + \theta_0^{A0} + I_P \Omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (23)$$

Из условий (20)-(22) следует, что [1,2]:

$$\Delta\left(\frac{\mu}{2}\right) = 0 \text{ на границе с областью устойчивости и областью неустойчивости}$$

и

$$\Delta\left(\frac{\mu}{2}\right) > 0 \text{ в области устойчивости.}$$

Раскрывая определитель (23) и учитывая выражения (17) и (8), можно получить соотношение, определяющее границу любой из областей неустойчивости на резонансных кривых:

$$R(A_1, \Omega, \mu, K_2, H) = 0 \quad (24)$$

Вычисления по формулам (2) и (3) и решение уравнения (24) производились на компьютере численным методом в системе символьных вычислений «Maple11» для следующих параметров ротора:  $H = +0,1 (\bar{I}_P = 1,008; \bar{I}_T = 0,909)$ ,  $H = -0,1 (\bar{I}_P = 0,909; \bar{I}_T = 1,008)$ ,  $K_2 = 2,25; 3,25$ ,  $K_1 = 2,25$ ;  $\ell = 0,88$ ;  $P = 0,02$ ;  $\mu = 0,01$ ;  $\varepsilon = 0,01$ ;  $\tau = 0,02$ ;  $\Omega = 0,8 \div 2$

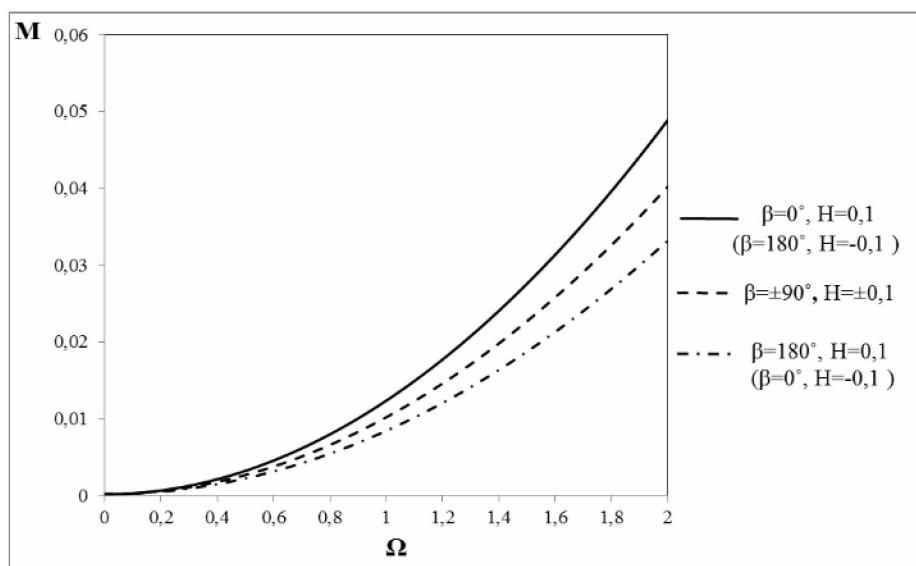


Рис. 2. Зависимость амплитуды вынуждающего момента от частоты вращения

Анализ формулы (2) показывает, что амплитуда вынуждающего момента достигает максимального значения при  $\beta=0^\circ, H=0,1$  ( $\beta=180^\circ, H=-0,1$ ), минимального значения – при  $\beta=180^\circ, H=0,1$  ( $\beta=0^\circ, H=-0,1$ ) и промежуточного значения – при  $\beta=\pm 90^\circ, H=\pm 0,1$ . Об этом свидетельствуют и графики  $M=M(\Omega)$  при различных значениях  $\beta$  и  $H$ , представленные на рис. 2. На рис. 3, на графиках  $\gamma=\gamma(\Omega)$  при  $\Omega \rightarrow \infty$  начальная фаза вынуждающего момента стремится к асимптотическому

значению: максимальному при  $\beta=+90^\circ, H=0,1 (\beta=-90^\circ, H=-0,1)$ , минимальному при  $\beta=+90^\circ, H=-0,1 (\beta=-90^\circ, H=+0,1)$  и принимает нулевое значение при  $\beta=0^\circ, 180^\circ$  при любых значениях.

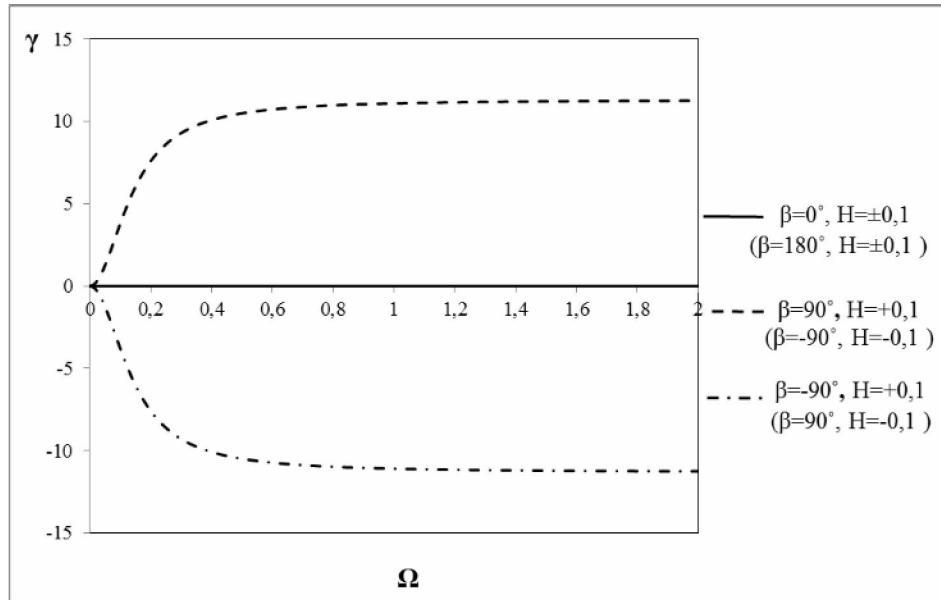


Рис.3. Зависимость начальной фазы вынуждающего момента от частоты вращения

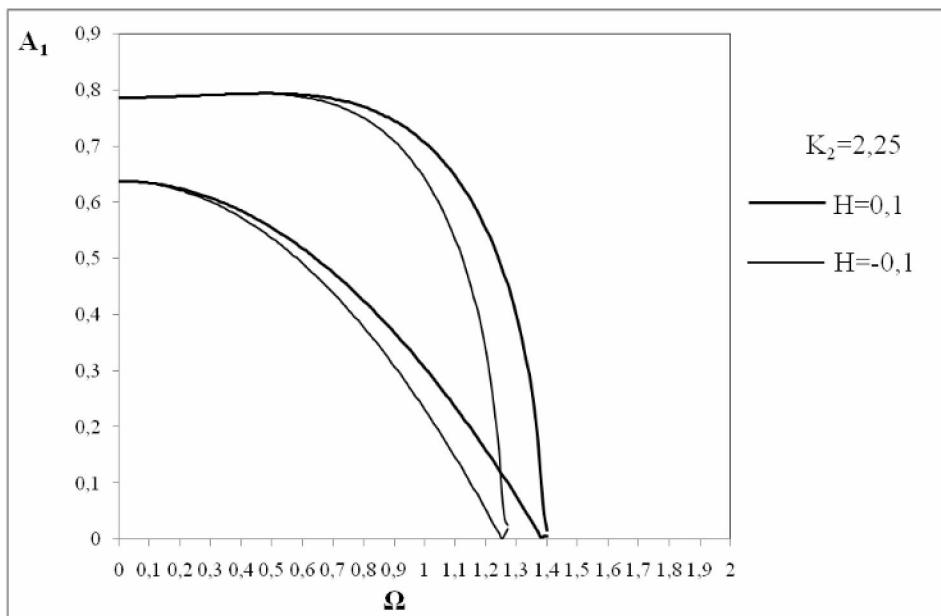
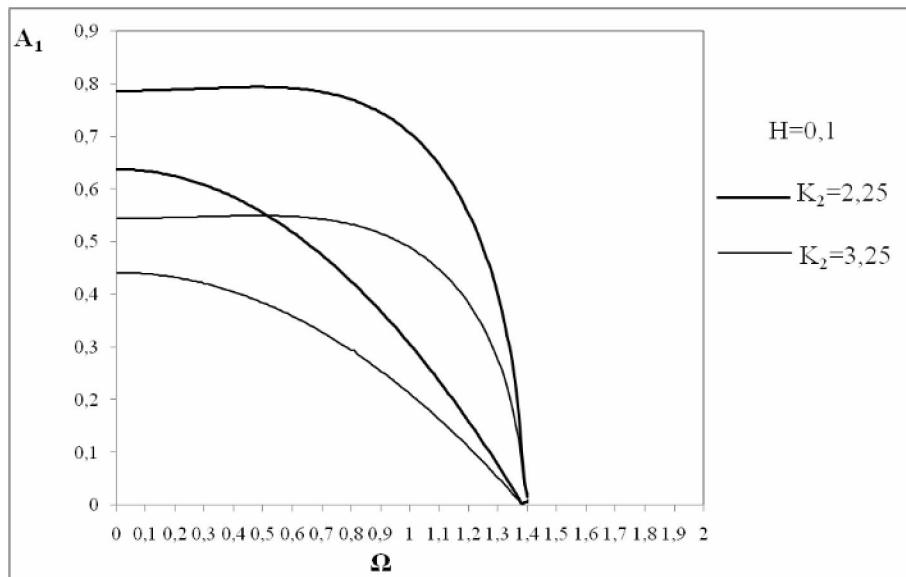
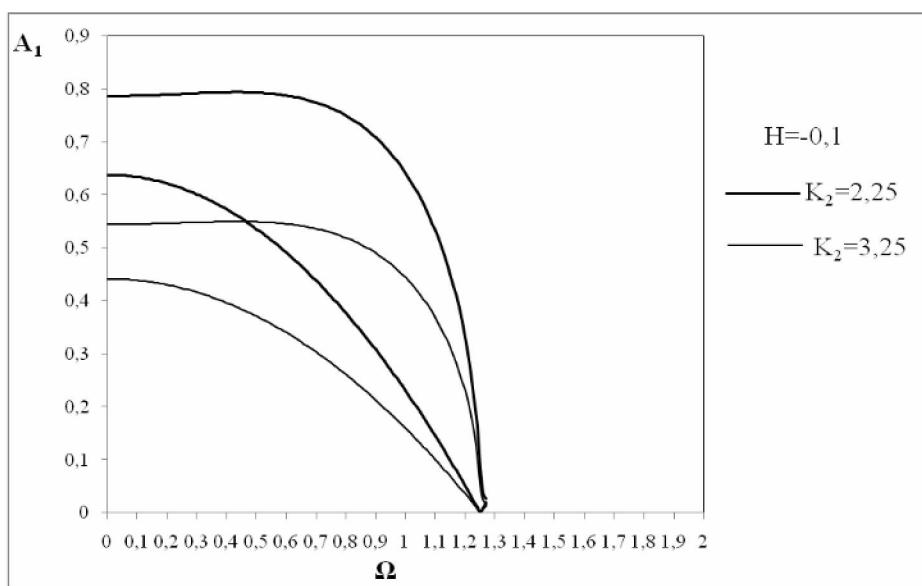


Рис.4. Влияние толщины диска на границы области неустойчивости

Из рис.4 прежде всего видно, что с уменьшением скорости вращения вала область неустойчивости сначала расширяется, а затем сужается. Толщина диска влияет на расположение границ области неустойчивости в плоскости  $\Omega, A_1$ , но при малых частотах вращения границы сливаются. Угол между ориентациями дисбаланса массы и углового эксцентрикитета не входит в выражения (8) и (23) или (24), следовательно, этот угол не влияет на область неустойчивости. Рис.5,6 показывают наклонение границ области неустойчивости, а также сужение ее ширины с ростом величины нелинейности упругой характеристики и при уменьшении угловой скорости ротора. Более заметно наклонение верней границы области неустойчивости.



**Рис.5.** Влияние величины нелинейности упругой характеристики на границы области неустойчивости. Случай тонкого диска



**Рис.6.** Влияние величины нелинейности упругой характеристики на границы области неустойчивости. Случай толстого диска

Таким образом, вертикальный жесткий гироскопический ротор с мягкой нелинейной упругой характеристикой был исследован на устойчивость около основной резонансной частоты. Были определены границы области неустойчивости в плоскости  $A_1$  и  $\Omega$ , исследовано влияние толщины диска, угла между линейным и угловым эксцентрикитетами, величины нелинейности упругой характеристики на расположение и ширину области неустойчивости.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Hayasi T. Nelineynie kolebaniya v fizicheskikh sistemah. M.: Mir, 1968.
2. Szemplinska-Stupnicka W. Higher harmonic oscillations in heteronymous nonlinear systems with one degree of freedom //Internal.J.Nonlinear Mech.-1968.-Vol.3, N1.-P.17-30.

---

Искаков Ж.

ЖУМСАҚ СЫЗЫҚТЫ ЕМЕС СЕРПІМДІ СИПАТТАМАСЫ БАР ТЕНГЕРІЛМЕГЕН  
ГИРОСКОПТЫҚ РОТОРДЫҢ РЕЗОНАНСТЫҚ ТЕРБЕЛІСТЕР КЕЗІНДЕГІ ОРНЫҚТЫЛЫҒЫ

Жұмсақ сыйықты емес серпімді сипаттамасы бар тенгерілмеген тік қатаң гироскоптық ротордың резонансстық тербелістер кезіндегі орнықтылығы зерттеледі. Ол үшін ротордың кинетикалық энергиясының, Рэлейдің сыйықты емес функциясының, серпімді тірегінің геометриялық сыйықты емес сипаттамасы ескерілген әлеуеттік энергиясының, сыртқы күштер моменттерінің өрнектері негізінде Лагранж түріндегі қозғалыс тендеулері жазылады. Мұнан әрі варияциялық түрдегі және орнықтылық үшін Хилл типіндегі тендеулер құрылады. Флоке теориясына сәйкесті шешімдері бұл тендеулерге қойылып, гармоникалық баланс әдісі пайдаланылып, орнықтылық критерий табылады. Ротордың резонанстық орнықсыздық облысы графикалық анықталады және оған дисбаланстар бағдарлары арасындағы бұрыштың, дискінің қалындығының және сыйықтық еместік шамасының әсері зерттеледі.

*Iskakov J.*

STABILITY OF UNBALANCED GYROSCOPIC SOFT ROTOR WITH NONLINEAR ELASTIC  
CHARACTERISTICS OF RESONANCE OSCILLATIONS

Stability of unstable vertical hard gyroscopic rotor is investigated with soft nonlinear resilient description at resonant vibrations. For this purpose equalizations of motion are made in form Lagrange on the basis of expressions of kinetic energy, nonlinear function of Relley, potential energy of rotor taking into account physically nonlinear description of resilient support, moments of external forces. Then written down equalization in variations and equalization for stability of type of Hill. In accordance with the theory of Floke of decision put in these equalizations and using the method of harmonic balance to be criterion of stability. The area of resonant instability is graphically determined and influence is investigated on her corner between the orientations of disbalances, thickness of disk and size of non-linearity.