

УДК 517.94

У.А. ИСКАКОВА

## ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА С ОТКЛОНИЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

*(Представлена академиком НАН РК Т.Ш. Кальменовым)*

В работе показан один метод решения смешанной задачи Коши для уравнения Лапласа с отклоняющимся аргументом.

В прямоугольной области  $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < \pi, -1 < t < 1\}$  рассмотрим задачу:

**Смешанная задача Коши.** Найти решение уравнения

$$Lu = u_{tt}(x,t) + u_{xx}(x,t) = f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega, \quad (1)$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi} = 0, \quad (2)$$

и начальным условиям

$$u|_{t=-1} = \varphi_1, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=-1} = \varphi_2. \quad (3)$$

Впервые в работе [4] Адамар Ж.С. построил пример, показывающий неустойчивость решения задачи Коши при  $f \equiv 0$  от заданных функций  $\varphi_1, \varphi_2$ . В работах [1–3] Тихоновым А.Н. и Лаврентьевым М.М. найдена условная корректность этой задачи и приведена ее регуляризация.

Методом разложения по собственным функциям смешанной задачи Коши для уравнения Лапласа с отклоняющимся аргументом в данной работе установлено необходимое и достаточное условие корректности задачи (1)–(3) в пространстве  $L_2(\Omega)$ .

**Определение.** Функцию  $u \in L_2(\Omega)$  назовем *сильным решением* смешанной задачи Коши (1)–(3), если существует последовательность функций  $\{u_n\} \in C^2(\bar{\Omega})$ , удовлетворяющих условиям

$$u_n|_{x=0} = 0, \quad u_n|_{x=\pi} = 0, \quad \frac{\partial u_n}{\partial t}\Big|_{t=-1} = 0, \quad u_n|_{t=-1} = 0.$$

и таких, что  $u_n$  и  $Lu_n$  сходятся в норме  $L_2(\Omega)$  соответственно к  $u$  и  $f$ .

В дальнейшем важную роль играет следующая задача на собственные значения для уравнения Лапласа с отклоняющимся аргументом:

$$Lu = u_{tt}(x,t) + u_{xx}(x,t) = \lambda u(x,-t), \\ 0 < x < \pi, -1 < t < 1 \quad (4)$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi} = 0, \quad (5)$$

$$u|_{t=-1} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=-1} = 0. \quad (6)$$

Эквивалентная запись уравнения (5) имеет вид

$$LPu = P(u_{tt}(x,t) + u_{xx}(x,t)) = \lambda u(x,t),$$

где  $P$  – оператор, определяемый по формуле  $Pu(x,t) = u(x,-t)$ .

Собственные функции задачи (4)-(6) ищем методом разделения переменных

$$u_{km}(x,t) = \sin kx v_{km}(t), \quad (7)$$

где  $k \neq 0, k \in Z$ .

В результате из (5) получим следующую спектральную задачу для уравнения с отклоняющимся аргументом

$$v''_{km}(t) - k^2 v_{km}(t) = \lambda v_{km}(-t), \quad -1 < t < 1 \quad (10)$$

$$v_{km}(-1) = 0, v'_{km}(-1) = 0. \quad (11)$$

Применяя оператор  $\frac{d^2}{dt^2} - k^2$  к обеим частям уравнения (10), приходим к уравнению

$$\left( \frac{d^2}{dt^2} - k^2 \right)^2 v_{km}(t) = \lambda^2 v_{km}(t), \quad (12)$$

общее решение которого представим в виде

$$v_{km}(t) = c_{1m} e^{\sqrt{k^2 + \lambda} t} + c_{2m} e^{-\sqrt{k^2 + \lambda} t} + c_{3m} e^{\sqrt{k^2 - \lambda} t} + c_{4m} e^{-\sqrt{k^2 - \lambda} t}. \quad (13)$$

Подставляя представление (13) в соотношение (5), находим формулу общего решения уравнения (5)

$$v_{km}(t) = c_{1m} \left( e^{\sqrt{k^2 + \lambda} t} + e^{-\sqrt{k^2 + \lambda} t} \right) + c_{2m} \left( e^{\sqrt{k^2 - \lambda} t} - e^{-\sqrt{k^2 - \lambda} t} \right) \quad (14)$$

где  $c_{1m}, c_{2m}$  – произвольные постоянные.

Из краевых условий (11) найдем систему линейных алгебраических уравнений относительно  $c_{1m}, c_{2m}$ . Характеристический определитель

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) &= \begin{vmatrix} e^{-\sqrt{k^2 + \lambda}} + e^{\sqrt{k^2 + \lambda}} & e^{-\sqrt{k^2 - \lambda}} - e^{\sqrt{k^2 - \lambda}} \\ \sqrt{k^2 + \lambda} \left( e^{-\sqrt{k^2 + \lambda}} - e^{\sqrt{k^2 + \lambda}} \right) & \sqrt{k^2 - \lambda} \left( e^{-\sqrt{k^2 - \lambda}} + e^{\sqrt{k^2 - \lambda}} \right) \end{vmatrix} = \\ &= \left( e^{-\sqrt{k^2 + \lambda}} + e^{\sqrt{k^2 + \lambda}} \right) \left( e^{-\sqrt{k^2 - \lambda}} + e^{\sqrt{k^2 - \lambda}} \right) \sqrt{k^2 - \lambda} - \left( e^{-\sqrt{k^2 - \lambda}} - e^{\sqrt{k^2 - \lambda}} \right) \left( e^{-\sqrt{k^2 + \lambda}} - e^{\sqrt{k^2 + \lambda}} \right) \sqrt{k^2 + \lambda}, \end{aligned} \quad (15)$$

нули которого однозначно определяют спектр задачи (10)-(11).

Равенство характеристического определителя нулю означает

$$\frac{\left( e^{-\sqrt{k^2 + \lambda}} + e^{\sqrt{k^2 + \lambda}} \right) \left( e^{-\sqrt{k^2 - \lambda}} + e^{\sqrt{k^2 - \lambda}} \right)}{\left( -e^{-\sqrt{k^2 + \lambda}} + e^{\sqrt{k^2 + \lambda}} \right) \left( -e^{-\sqrt{k^2 - \lambda}} + e^{\sqrt{k^2 - \lambda}} \right)} = \frac{\sqrt{k^2 + \lambda}}{\sqrt{k^2 - \lambda}}. \quad (16)$$

Покажем, что при каждом фиксированном  $k$  трансцендентное уравнение (16) имеет бесконечное множество корней  $\lambda_{km}, m = 1, 2, \dots$  и соответствующие собственные функции  $\{v_{km}(t)\}$  образуют полную ортонормированную систему функций в  $L_2(-1,1)$ .

Действительно, применяя к задаче Коши (10)-(11) обратный оператор  $L_C^{-1}$ , приходим к операторному уравнению

$$v_{km}(t) = \lambda (L_C^{-1} P u_{km})(t), \quad (17)$$

где функция  $v = (L_C^{-1} f)(t)$  удовлетворяет уравнению

$$\nu''(t) - k^2 \nu(t) = f$$

и условиям Коши  $\nu(-1) = \nu'(-1) = 0$ .

Обозначим  $\tilde{\nu}(t) = (L_C^{-1})^* f$  решение сопряженной задачи Коши

$$\tilde{\nu}''(t) - k^2 \tilde{\nu}(t) = \lambda \tilde{\nu}(t), \quad \tilde{\nu}(1) = \tilde{\nu}'(1) = 0.$$

Для любой  $f \in L_2(-1,1)$  справедливо соотношение

$$L_C^{-1} Pf = (L_C^{-1} P)^* f = P^* (L_C^{-1})^* f = P(L_C^{-1})^* f. \quad (18)$$

То есть оператор  $L_C^{-1} p$  является вполне непрерывным самосопряженным оператором Гильберта-Шмидта [6] и поэтому при каждом  $k$  спектральная задача (10)-(11) имеет полную ортонормированную систему функций  $\{\nu_{km}(t)\}$  в  $L_2(-1,1)$ .

Тем самым доказана.

**Лемма 1.** При фиксированном  $k$  спектральная задача (10)-(11) имеет полную ортонормированную в  $L_2(-1,1)$  систему собственных векторов  $\{\nu_{km}(t)\}$ , соответствующих собственным значениям  $\lambda_{km}$ , являющихся корнями уравнения (16).

Из самосопряженности задачи (10)-(11) следует вещественность ее собственных значений, то есть вещественность корней  $\lambda_{km}$  уравнения (16) и легко проверить, что  $\lambda_{km} > 0$ .

Выпишем асимптотику наименьших собственных значений  $\{\lambda_{km}\}$  при  $k \rightarrow \infty$ . Умножая числитель и знаменатель левой части равенства (16) на  $e^{-\sqrt{k^2+\lambda}}$  и  $e^{-\sqrt{k^2-\lambda}}$ , преобразуем его к виду

$$\frac{(1+e^{-2\sqrt{k^2+\lambda}})(1+e^{-2\sqrt{k^2-\lambda}})}{(1-e^{-2\sqrt{k^2+\lambda}})(1-e^{-2\sqrt{k^2-\lambda}})} = \sqrt{\frac{k^2+\lambda}{k^2-\lambda}}. \quad (19)$$

Считая  $|\lambda| < 1$  и логарифмируя обе части равенства (19), получим

$$f_k(\lambda) = \ln(1+e^{-2\sqrt{k^2+\lambda}}) - \ln(1-e^{-2\sqrt{k^2+\lambda}}) + \ln(1+e^{-2\sqrt{k^2-\lambda}}) - \ln(1-e^{-2\sqrt{k^2-\lambda}}) - \frac{1}{2} [\ln(k^2+\lambda) - \ln(k^2-\lambda)] = 0 \quad (20)$$

Имеет место

**Лемма 2.** Существует  $\lambda_0$  такое, что при  $0 < \lambda < \lambda_0 < \frac{1}{15}$  функция  $f'_k(\lambda) < 0$  для любого  $k$ , а

при  $k \geq 3$  выполняется неравенство  $|f''_k(\lambda)k^2| < 1$ .

**Доказательство.** Непосредственным вычислением из (20) находим

$$\begin{aligned} f'_k(\lambda) &= -\frac{e^{-2\sqrt{k^2+\lambda}}}{\sqrt{k^2+\lambda}} \left[ \frac{1}{1+e^{-2\sqrt{k^2+\lambda}}} + \frac{1}{1-e^{-2\sqrt{k^2+\lambda}}} \right] + \frac{e^{-2\sqrt{k^2-\lambda}}}{\sqrt{k^2-\lambda}} \left[ \frac{1}{1+e^{-2\sqrt{k^2-\lambda}}} + \frac{1}{1-e^{-2\sqrt{k^2-\lambda}}} \right] - \\ &- \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{k^2+\lambda} + \frac{1}{k^2-\lambda} \right] = -\frac{2e^{-2\sqrt{k^2+\lambda}}}{\sqrt{k^2+\lambda}} \frac{1}{(1-e^{-4\sqrt{k^2+\lambda}})} + \\ &+ \frac{2e^{-2\sqrt{k^2-\lambda}}}{\sqrt{k^2-\lambda}} \frac{1}{(1-e^{-4\sqrt{k^2-\lambda}})} - \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{k^2+\lambda} + \frac{1}{k^2-\lambda} \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

Теперь оценим  $f''(\lambda)$ . Для этого перепишем равенство (21) в виде

$$\begin{aligned} f'_k(\lambda) = & -\frac{1}{\sqrt{k^2 + \lambda}} \left[ \left( \frac{1}{1 - e^{-2\sqrt{k^2 + \lambda}}} - 1 \right) + \left( 1 - \frac{1}{1 + e^{-2\sqrt{k^2 + \lambda}}} \right) \right] + \\ & + \frac{1}{\sqrt{k^2 - \lambda}} \left[ \left( \frac{1}{1 - e^{-2\sqrt{k^2 - \lambda}}} - 1 \right) + \left( 1 - \frac{1}{1 + e^{-2\sqrt{k^2 - \lambda}}} \right) \right] - \frac{k^2}{k^4 - \lambda^2}. \end{aligned} \quad (22)$$

Дифференцируя (22) и проводя необходимые упрощения, получим

$$\begin{aligned} f''_k(\lambda) = & \frac{1}{(k^2 + \lambda)^{3/2}} \frac{e^{-2\sqrt{k^2 + \lambda}}}{(1 - e^{-4\sqrt{k^2 + \lambda}})} + \frac{1}{(k^2 + \lambda)} \left[ \frac{e^{-2\sqrt{k^2 + \lambda}}}{(1 - e^{-2\sqrt{k^2 + \lambda}})^2} + \frac{e^{-2\sqrt{k^2 + \lambda}}}{(1 + e^{-2\sqrt{k^2 + \lambda}})^2} \right] + \\ & + \frac{1}{(k^2 - \lambda)^{3/2}} \frac{e^{-2\sqrt{k^2 - \lambda}}}{1 - e^{-4\sqrt{k^2 - \lambda}}} + \frac{1}{(k^2 - \lambda)} \left[ \frac{e^{-2\sqrt{k^2 - \lambda}}}{(1 - e^{-2\sqrt{k^2 - \lambda}})^2} + \frac{e^{-2\sqrt{k^2 - \lambda}}}{(1 + e^{-2\sqrt{k^2 - \lambda}})^2} \right] - \frac{2k^2 \lambda}{(k^2 - \lambda)^2} = \\ = & \frac{1}{(k^2 + \lambda)^{3/2}} \frac{e^{-2\sqrt{k^2 + \lambda}}}{(1 - e^{-4\sqrt{k^2 + \lambda}})} + \frac{2}{(k^2 + \lambda)} \left[ \frac{e^{-2\sqrt{k^2 + \lambda}} + e^{-6\sqrt{k^2 + \lambda}}}{(1 - e^{-4\sqrt{k^2 + \lambda}})^2} \right] + \frac{1}{(k^2 - \lambda)^{3/2}} \frac{e^{-2\sqrt{k^2 - \lambda}}}{(1 - e^{-4\sqrt{k^2 - \lambda}})} + \\ & + \frac{2}{(k^2 - \lambda)} \left[ \frac{e^{-2\sqrt{k^2 - \lambda}} + e^{-6\sqrt{k^2 - \lambda}}}{(1 - e^{-4\sqrt{k^2 - \lambda}})^2} \right] - \frac{2k^2 \lambda}{(k^2 - \lambda)^2}. \end{aligned} \quad (23)$$

При  $0 < \lambda < \lambda_0$  имеем в результате

$$\begin{aligned} f''_k(\lambda) \leq & \frac{2e^{-2\sqrt{k^2 - \lambda}}}{(k^2 - \lambda)^{3/2}(1 - e^{-4\sqrt{k^2 - \lambda}})} + \frac{4}{(k^2 - \lambda)} \left[ \frac{e^{-2\sqrt{k^2 - \lambda}} + e^{-6\sqrt{k^2 - \lambda}}}{(1 - e^{-4\sqrt{k^2 - \lambda}})^2} \right] + \frac{2k^2 \lambda}{(k^4 - \lambda^2)^2} < \\ < & \frac{4e^{-2\sqrt{k^2 - \lambda_0}}}{(k^2 - \lambda_0)(1 - e^{-4\sqrt{k^2 - \lambda_0}})^2} + \frac{2k^2}{(k^4 - \lambda_0^2)^2} < \frac{4e^{-2\sqrt{k^2 - \lambda_0}}}{(k^2 - \lambda_0)} \left( 1 + 2e^{-4\sqrt{k^2 - \lambda_0}} \right) + \frac{2k^2}{(k^4 - \lambda_0^2)^2} < \\ & < \frac{12e^{-2\sqrt{k^2 - \lambda_0}}}{(k^2 - \lambda_0)} + \frac{2k^2}{(k^4 - \lambda_0^2)^2} \end{aligned} \quad (24)$$

Умножив неравенство (24) на  $k^2$ , получим при  $k = 1, 2, 3, \dots$  и  $0 < \lambda < \lambda_0$

$$\begin{aligned} k^2 f''_k(\lambda) \leq & \frac{12k^2}{(k^2 - \lambda_0)} + \frac{2k^4}{(k^4 - \lambda_0^2)^2} = 12 \left( 1 + \frac{\lambda_0}{(k^2 - \lambda_0)} \right) + \frac{2k^4}{(k^4 - \lambda_0^2)^2} < \\ < & 12 \left( 1 + \frac{\lambda_0}{(1 - \lambda_0)} \right) + \frac{2k^4}{(k^4 - \lambda_0^2)^2} < 12 \left( 1 + \frac{\lambda_0}{(1 - \lambda_0)} \right) + \frac{k^4}{k^8} \frac{1}{\left( 1 - \frac{\lambda_0^2}{k^4} \right)^2} \leq 14 \left( 1 + \frac{\lambda_0}{(1 - \lambda_0)} \right), \end{aligned} \quad (25)$$

а при  $k = 3, 4, 5, \dots$

$$k^2 f''_k(\lambda) \leq \frac{12e^{-2\sqrt{k^2 - \lambda_0}}}{(k^2 - \lambda_0)} + \frac{2k^2}{(k^4 - \lambda_0^2)^2} \leq 14 \left( 1 + \frac{\lambda_0}{(1 - \lambda_0)} \right) e^{-2\sqrt{8}} < 1$$

Отсюда при  $\lambda_0 < \frac{1}{15}$  из равенства (21) следует неравенство

$$f'(\lambda) = f'(0) + f''(\lambda)\lambda_0 \leq -\frac{1}{k^2} + 14\frac{1}{k^2}\left(1 + \frac{\lambda_0}{1 - \lambda_0}\right)\lambda_0 < 0.$$

Лемма 2 доказана.

**Лемма 3.** Асимптотика собственных значений задачи (10)-(11), не превосходящих  $\lambda_0$ , при больших  $k$  имеет следующий вид

$$\lambda_{k1} = 4k^2 e^{-2k} (1 + o(1)). \quad (26)$$

Доказательство. Согласно лемме 1 монотонная функция  $f_k(\lambda)$  на интервале  $(0, \lambda_0)$  может иметь только один нуль. Согласно формуле Лагранжа имеем

$$f_k(\lambda) = f_k(0) + f'_k(0)\lambda + \tilde{f}_k(\lambda)\lambda^2. \quad (27)$$

Из формул (20) и (21) следует, что

$$f_k(\lambda) = 2[\ln(1 + e^{-2k}) - \ln(1 - e^{-2k})] - \frac{\lambda}{k^2} + \tilde{f}_k(\lambda)\lambda^2. \quad (28)$$

Умножая обе части равенства (28) на  $k^2$ , получим

$$k^2 f_k(\lambda) = 2k^2 [\ln(1 + e^{-2k}) - \ln(1 - e^{-2k})] - \lambda + k^2 \tilde{f}_k(\lambda)\lambda^2. \quad (29)$$

Вычислим нули линейной части функции  $k^2 f_k(\lambda)$

$$\lambda_{k1} = 2k^2 [\ln(1 + e^{-2k}) - \ln(1 - e^{-2k})]. \quad (30)$$

При достаточно больших  $k \gg 1$  в силу асимптотических формул

$$\ln(1 + e^{-2k}) = e^{-2k} + o(e^{-2k}), \quad \ln(1 - e^{-2k}) = -e^{-2k} + o(e^{-2k}),$$

из (27) имеем

$$\lambda_{k1} = 4k^2 e^{-2k} (1 + o(1)). \quad (31)$$

Из леммы 3 следует  $|\tilde{f}_k(\lambda)k^2| \leq \max|f_k^{(H)}(\lambda)k^2| \leq 1$ ,  $k = 3, 4, \dots$ . Поэтому на окружности  $|\lambda| = 4k^2 e^{-2k}(1 + \varepsilon)$ , где  $\varepsilon$  сколь угодно малое положительное число, из соотношения (29) при достаточно больших  $k \geq k_0(\varepsilon)$  имеем

$$|\tilde{f}_k(\lambda)k^2\lambda^2|_{|\lambda|=4k^2 e^{-2k}(1+\varepsilon)} \leq |2k^2 [\ln(1 + e^{-2k}) - \ln(1 - e^{-2k})] - \lambda|_{|\lambda|=4k^2 e^{-2k}(1+\varepsilon)}, \quad (32)$$

Согласно теореме Руше [7] количество нулей функции  $k^2 f_k(\lambda)$  и ее линейной части совпадает и лежат внутри круга  $|\lambda| < 4k^2 e^{-2k}(1 + o(1))$ . Поэтому функция  $k^2 f_k(\lambda)$  при  $0 < \lambda < \lambda_0$  обязательно имеет один нуль, асимптотика которой задается формулой (26). Лемма 3 доказана.

Проведем нормировку функций

$$u_{km} = \sin kx \quad v_{km}(t), \quad (33)$$

где  $v_{km}(t)$  определены соотношением (14).

**Теорема 1.** Спектральная задача Коши (5)-(7) имеет полную ортонормированную систему собственных векторов  $\{u_{km}(x, t)\} = \{\sin kx \quad v_{km}(t)\}$ , где  $v_{km}(t)$  задаются формулой (14), а собственные зна-

чения  $\lambda_{km}$  являются корнями уравнения (16). При этом при больших  $k$  наименьшее собственное значение  $\lambda_{k1}$  имеет асимптотику

$$\lambda_{k1} = 4k^2 e^{-2k} (1 + o(1)). \quad (34)$$

Теперь с помощью собственных функций задачи (5)-(7) решим смешанную задачу Коши (1)-(3).

Пусть  $u \in C^2(\bar{\Omega})$  решение задачи (1)-(3). В силу полноты и ортонормированности собственных функций  $u_{km}(x, t)$  задачи (5)-(7) функцию  $u(x, t)$  в  $L_2(\Omega)$  можно разложить в ряд

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{km} u_{km}(x, t), \quad (35)$$

где  $a_{km}$  - коэффициенты Фурье по системе  $\{u_{km}(x, t)\}$ .

Переписав уравнение (1) в виде

$$LPu = P(u_{tt} + u_{xx}) = Pf \quad (36)$$

и подставив правую часть (35) в равенство (36) с учетом соотношения

$$P\Delta u_{km} = \lambda_{km} u_{km},$$

получим

$$a_{km} = \frac{\tilde{f}_{km}}{\lambda_{km}}, \quad (37)$$

где

$$\tilde{f}_{km} = (f(x, -t), u_{km}(x, t))_0. \quad (38)$$

Таким образом, получим следующее представление

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tilde{f}_{km}}{\lambda_{km}} u_{km}(x, t). \quad (39)$$

Отметим, что представление (39) остается справедливым для любого сильного решения задачи (1)-(3). Естественно возникает вопрос, для какого подмножества функций  $f \in L_2(\Omega)$  существует сильное решение? Для ответа на вопрос преобразуем формулу (39) к следующему виду

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{f}_{k1}}{\lambda_{k1}} u_{k1}(x, t) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\tilde{f}_{km}}{\lambda_{km}} u_{km}(x, t). \quad (40)$$

Из (40) следует, что

$$\|u\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\tilde{f}_{k1}}{\lambda_{k1}} \right|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=2}^{\infty} \left| \frac{\tilde{f}_{km}}{\lambda_{km}} \right|^2. \quad (41)$$

В силу леммы 3 имеем  $\lambda_{km} \geq \lambda_0$ ,  $m = 2, 3, \dots$ , поэтому правая часть равенства (41) ограничена только для тех  $f(x, t)$ , для которых ограничена следующая весовая норма

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\tilde{f}_{k1}}{\lambda_{k1}} \right|^2 < \infty. \quad (42)$$

Тем самым доказана

**Теорема 2.** Сильное решение смешанной задачи Коши существует тогда и только тогда, когда  $f(x, t)$  удовлетворяет неравенству (42).

Через  $\bar{L}_c^{-1}$  обозначим обратный оператор сильного оператора  $\bar{L}_c$ , определяемых соотношениями (1)-(3).

Из теоремы 2 следует

**Теорема 3.** Оператор  $\bar{L}_c^{-1}$  отображает единичный шар  $\|f\| \leq 1$  в шар  $\|u\| \leq N$  тогда и только тогда, когда существует  $k_0(N)$  такой, что выполняются условия

$$\tilde{f}_{k1} = (Pf, u_{k1}) = 0, \quad k = k_0(N), k_0(N) + 1, \dots, \quad (43)$$

где  $Pf(x, t) = f(x, -t)$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А.Н. О нелинейных уравнениях первого рода // Доклады АН СССР. 1965, Т. 161, № 5.С. 1023-1026.
2. Лаврентьев М.М. О задаче Коши для уравнения Лапласа // Доклады АН СССР. 1955, Т. 102, № 2.С. 205-206.
3. Лаврентьев М.М. О задаче Коши для уравнения Лапласа // Известия АН СССР. 1956, Т. 20, № 6.С. 819-842.

4. Адамар Ж.С. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М.: Наука. 1978

5. Кальменов Т.Ш., Шалданбаев А.Ш., Роговой А.В. Структура спектрального множества регулярных задач для дифференциальных уравнений // Вычислительные технологии, Т. 9, №3, 2003, Алматы, с.61-69.

6. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука. 1969. 528с.

7. Леонтьев А.Ф. Целые функции. Ряды экспонент. М.: Наука. 1983.176с.

## Резюме

Бұл жұмыста аргументі ауытқыған Лаплас тендеуінің аралас Коши есебі шешімінің бір әдісі қарастырылған.

## Summary

In this paper, we obtain a necessary and sufficient condition for the mixed Cauchy problem for the Laplace Equation to be well-posed in the space  $L_2(\Omega)$  by the method of expansion in the eigenfunctions of the mixed Cauchy problem for the Laplace equation with deviating argument.

Институт математики,  
механики и информатики,  
г. Алматы

Поступила 5.04.2010 г.