

УДК 532.529:661.9

*Б.Р. ИСМАИЛОВ, О.С. БАЛАБЕКОВ, А.Н. УРМАТОВА*

(Южно-Казахстанский государственный университет им. М.Ауэзова, Шымкент,  
Южно-Казахстанский государственный педагогический институт, Шымкент,  
Международный Казахско-Турецкий университет им. Х.А.Яссави, Туркестан)

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ  
ХАРАКТЕРИСТИК ГАЗОКАПЕЛЬНОЙ СМЕСИ  
НА НАЧАЛЬНОМ УЧАСТКЕ МНОГОСТУПЕНЧАТОГО КАНАЛА  
МАССООБМЕННЫХ АППАРАТОВ**

**Аннотация**

Целью работы является нахождение поля скорости газа и траекторий капель на начальном участке многоступенчатого канала с пластинчатыми насадками. Динамические характеристики газокапельной смеси, образованной диспергированием жидкости потоком газа найдены численным решением систем уравнений

сохранения количества движения для сплошной фазы и движения дисперсной фазы-капель жидкости. Найдены явные выражения для скорости газа на входном участке в виде параболы Пуазейля и произведен расчет траектории капель разных диаметров. Результаты работы могут быть применены для нахождения массообменных характеристик работы аппаратов химической технологии с учетом времени пребывания капель в ступени контакта, доли капель в общем объеме жидкости в аппарате, коэффициента массообмена.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, газокапельная смесь, массообменный аппарат, начальный участок.

**Тірек сөздер:** математикалық үлгілеу, газ-тамшы қоспасы, массаауысу аппараты, бастапқы тарауы.

**Keywords:** mathematical modeling, mixture of gas and droplets, mass transfer apparatus, initial section.

Аппараты с многоступенчатым взаимодействием фаз (AMBФ) [1], благодаря своим высоким технико-экономическим показателям, широко применяются в химической технологии при проведении процессов абсорбции, десорбции, ректификации, очистки отходящих газов и др. Газокапельная смесь в многоступенчатом канале АМВФ имеет сложную структуру, которая в общем случае определяется неоднородным нестационарным газовым потоком и полидисперсностью капель жидкости [2].

Исследование структуры газокапельной смеси в АМВФ и других аппаратах с подобной гидродинамикой посвящено большое число работ [3-6]. В частности, в работах [4-6] многоступенчатый канал АМВФ представлен как объединение начального и стабилизированного участков. Такая методика обоснована доказательством разрешимости уравнений сохранения количества движения, результатами численных экспериментов с разными исходными данными режимных и конструкционных параметров АМВФ для стабилизированного участка многоступенчатого канала.

Наряду с этим, развитие течения газокапельной смеси на начальном участке остается малоизученной задачей. Длина начального участка канала АМВФ составляет небольшую долю многоступенчатого канала, однако учет распределения динамических и массообменных характеристик газа в нем позволяет уточнить расчет интегральных показателей работы АМВФ и проводить оптимизацию режимных характеристик. Поэтому моделирование и расчет распределения характеристик газокапельной смеси на начальном участке многоступенчатого канала является актуальной задачей.

В данной работе рассмотрено решение задачи о движении капель жидкости в многоступенчатом канале, в котором используется принцип диспергирования жидкости газом. Как было показано в работах Балабекова О.С. и его последователей [1-6], в АМВФ реализуются пленочное, струйное и капельное течения жидкости. Однако, учитывая тот факт, что в интенсивных режимах взаимодействия фаз пленка жидкости дробится на струйки, которые моментально распадаются на капли, последние являются основным устойчивым структурным элементом жидкости [1]. Численные эксперименты, проведенные по математическим моделям турбулентного течения газа в АМВФ [6], показали количественную и качественную зависимость поля скоростей от геометрических размеров и режимных характеристик. Главным выводом при этом можно считать полученные зависимости динамических характеристик - скорости, завихренности, кинетической энергии и локального масштаба от координат. Для двумерного обтекания пластин они позволяют обработать эти зависимости в следующем виде:

$$u_{i,j} = f_1(Re, i, j), v_{i,j} = f_2(Re, i, j), k_{i,j} = f_3(Re, i, j), l_{i,j} = f_4(Re, i, j), \quad (1)$$

где  $i, j$  – координаты сеточных узлов сеточной области;  $Re$  – число Рейнольдса для газа; функции  $f_{i,j}$  зависят от комплекса  $t_e/b$  ( $t_e$  и  $b$  – ширина и высота одной ступени контакта, соответственно).

Такие зависимости существуют и для ламинарного режима течения газа в многоступенчатом канале. В неподвижной среде капля с диаметром  $d$  падает (витает) со следующей скоростью [7]:

$$u_{\text{sum}} = \sqrt{\frac{4gd(\rho_{\text{ж}} - \rho_e)}{3\xi\rho_e}}, \quad (2)$$

где  $g=9,8 \text{ м/с}^2$ ;  $\rho_{\text{ж}}$  - плотность жидкости,  $\text{кг}/\text{м}^3$ ;  $\rho_e$  - плотность газа,  $\text{кг}/\text{м}^3$ ;  $\xi$  - коэффициент сопротивления, имеющий разные значения в зависимости от числа Рейнольдса для капли

$\text{Re}_0 = \frac{ud\rho_e}{\mu_e}$ . В движущемся газовом потоке скорость капель будет отличаться от (2) и она будет во многом определяться локальной скоростью газа в контактной зоне.

Для получения количественных данных в контактной зоне АМВФ были измерены размеры капель при диспергировании жидкости в многоступенчатом канале с регулярно расположенными пластинчатыми насадками [3], которые показали, что с допустимой погрешностью функция распределения капель по размерам имеет следующий вид (закон Розина-Раммлера):

$$F(x) = \exp\left(-\frac{d}{\bar{d}}\right)^n, \quad (3)$$

где  $\bar{d}$  - константа размерности;  $n$  – константа распределения диаметра капель.

Диаметр наиболее часто встречающихся капель находим как значение, реализующий максимум первой производной от  $F(x)$ :

$$d_{\text{mod}} = \bar{d}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}. \quad (4)$$

Уравнение (2), полученное сравнением сил аэродинамического сопротивления и тяжести капель, действительно для неподвижной среды. В газокапельном движущемся потоке за скорость капли необходимо принимать относительную скорость капли, т.е. ее скорость капли относительно скорости газа. На рис.1 показана схема начального участка многоступенчатого канала, где нами будет рассчитаны траектории капель разных диаметров. Для упрощения анализа происходящего процесса взаимодействия газа и жидкости рассмотрим канал с одной гирляндой пластинчатых насадок.

Ставим задачу моделирования и расчета движения капель разных диаметров непосредственно у проемов  $A, B$  начального участка. Пусть  $m_1, m_2$  – числа делений расчетной сеточной области решения уравнений для газового потока у проемов  $A$  и  $B$ , соответственно;  $m, n$  – общие числа делений по горизонтальной и вертикальной оси, соответственно. Так как в начальный участок входит невозмущенный поток, то входные профили скорости на проемах  $A, B$  можно считать параболическими:

$$u(y) = ay^2 + by + c \quad (5)$$

При выборе квадратной сетки для решения уравнений сохранений количества движения для газового потока [5,6]  $h_x = h_y$ ,  $h_y = \frac{1}{m}$ . Отсюда  $n = \frac{ml}{d}$ .

Функция тока связана со скоростью соотношениями

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = u(y), \quad \psi(y) = \int u(y) dy \quad (6)$$

В безразмерном виде

$$\psi|_{\Gamma_1} = 0, \quad \psi|_{\Gamma_2} = 1, \quad Q = \psi|_{\Gamma_2} - \psi|_{\Gamma_1} \quad (7)$$

Для нахождения коэффициентов функции (5) для проема  $A$  используем условия прилипания:

$$u(0) = 0, \text{ т.е. } c = 0; \text{ для } y_k = m_1 h: u(m, h) = a(m, h)^2 + b(m, h), \text{ т.е.}$$

$$a(m, h) + b = 0 \quad (8)$$

По условию (6)

$$\int_0^{m_1 h} (ay^2 + by) dy = \int_0^{m_1 h} (ay^2 - am, hy) dy = -a \frac{(m_1 h)^3}{6}. \quad (9)$$

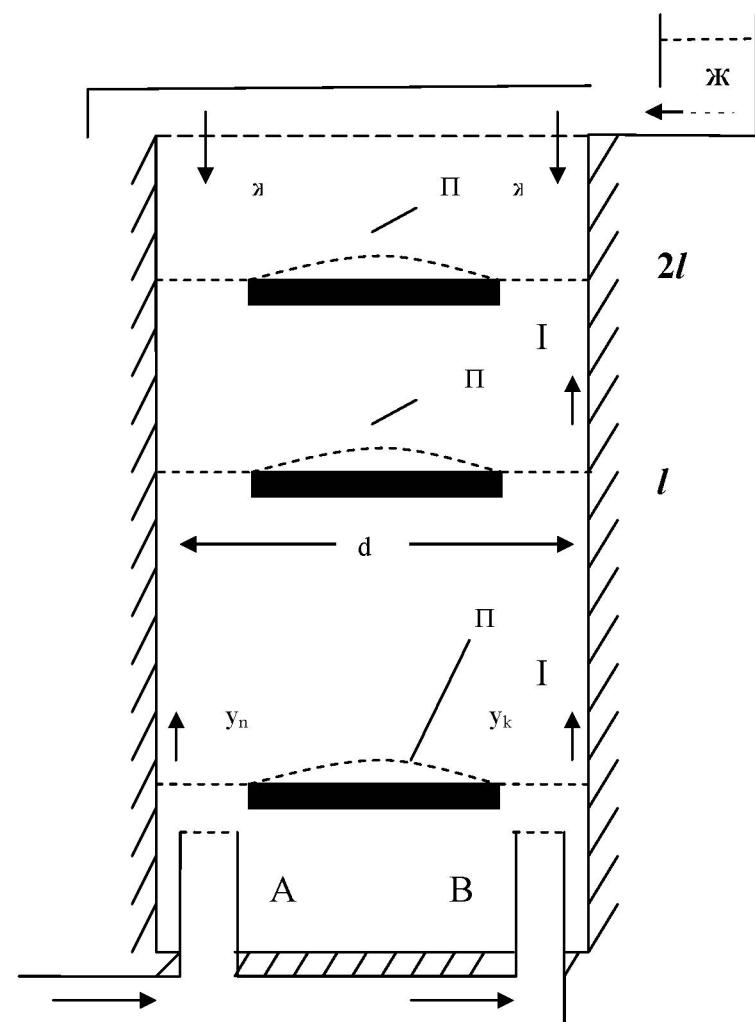


Рисунок 1 – Схема начального участка многоступенчатого канала:  $y_n, y_k$  – координаты кромок пластины;  $d, l$  – ширина и высота ступени контакта;  $A, B$  – проемы для газа;  $\Pi$  – пленка жидкости.

$$\text{Отсюда } a = -\frac{3}{(m, h)^3}, \quad b = \frac{3}{(m, h)^2}.$$

Аналогично для проема  $B$  получим  $u(y) = \bar{a}y^2 + \bar{b}y + \bar{c}$ ,

$$y = 1: \quad \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = 0 \quad (10)$$

$$y = y_k: \quad \bar{a}y_k^2 + \bar{b}y_k + \bar{c} = 0 \quad (11)$$

$$Q = \frac{1}{2}: \quad \int_{y_k}^1 (\bar{a}y^2 + \bar{b}y + \bar{c}) dy = \frac{1}{2} \quad (12)$$

Уравнения (10)-(12) можно записать в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} &= 0 \\ \bar{a}y_k^2 + \bar{b}y_k + \bar{c} &= 0 \\ \frac{1+y_k+y_k^2}{3}\bar{a} + \frac{1+y_k}{2}\bar{b} + \bar{c} &= \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Решениями системы (13) являются числа:

$$\left. \begin{array}{l} \bar{a} = \frac{3}{2}(y_k - 1)(y_k + 2), \\ \bar{b} = \frac{3}{2}(y_k^2 - 1)(y_k + 2), \\ \bar{c} = \frac{3}{2}y_k(y_k - 1)(y_k + 2). \end{array} \right\} \quad (14)$$

Таким образом, уравнения для скорости имеют следующий вид:

$$\text{для } A: u(y) = -\frac{3}{y_n^3}(y^2 - y_n \cdot y), \quad (15)$$

$$\text{для } B: u(y) = -\frac{3}{2}(y_k - 1)(y_k + 2)(y^2 - (y_k + 1)y + y_k), \quad y_k \leq y \leq 1 \quad (16)$$

Для расчета траекторий капель в рассчитанном поле скоростей (15)-(16) используем следующую систему дифференциальных уравнений [8-9]:

$$\frac{dw}{dt} = -K \cdot w^2 - g \cdot \sin \gamma - (P_x \cdot \cos \gamma + P_y \cdot \sin \gamma) - \quad (17)$$

$$-w \cdot (e'_x \cdot \cos \gamma + e'_y \cdot \sin \gamma) - w \cdot A - A \cdot (W_e^x \cdot \cos \gamma + W_e^y \cdot \sin \gamma),$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\frac{g \cdot \cos \gamma}{w} + \frac{(P_x \cdot \sin \gamma - P_y \cdot \cos \gamma)}{w} - e'_y \cdot \cos \gamma + e'_x \cdot \sin \gamma - \quad (18)$$

$$-\frac{A \cdot (W_e^x \cdot \sin \gamma - W_e^y \cdot \cos \gamma)}{w},$$

где для удобства введены обозначения:

$$\vec{P}(\vec{r}) = \left( \vec{W}_e \cdot \frac{\partial \vec{W}_e}{\partial \vec{r}} \right) = P_x \cdot \vec{i} + P_y \cdot \vec{j}, \quad (19)$$

$$\vec{e}'(\vec{r}) = \left( \vec{e} \cdot \frac{\partial \vec{W}_e}{\partial \vec{r}} \right) = e'_x \cdot \vec{i} + e'_y \cdot \vec{j}. \quad (20)$$

Компоненты этих векторов определяются выражениями:

$$P_x = \frac{\partial \vec{W}_e^x}{\partial x} \cdot \vec{W}_e^x + \frac{\partial \vec{W}_e^x}{\partial y} \cdot \vec{W}_e^y, \quad (21)$$

$$P_y = \frac{\partial \vec{W}_e^y}{\partial x} \cdot \vec{W}_e^x + \frac{\partial \vec{W}_e^y}{\partial y} \cdot \vec{W}_e^y, \quad (22)$$

$$e'_x = \frac{\partial \vec{W}_e^x}{\partial x} \cdot \cos \gamma + \frac{\partial \vec{W}_e^x}{\partial y} \cdot \sin \gamma, \quad (23)$$

$$e'_y = \frac{\partial \vec{W}_e^y}{\partial x} \cdot \cos \gamma + \frac{\partial \vec{W}_e^y}{\partial y} \cdot \sin \gamma, \quad (24)$$

где единичный вектор направления относительной скорости капли определяется через угол  $\gamma$  следующим образом:

$$\vec{e} = \cos \gamma \cdot \vec{i} + \sin \gamma \cdot \vec{j}. \quad (25)$$

Координатное представление скорости капли выражается следующими двумя уравнениями:

$$\frac{dx}{dt} = W_e^x + w \cdot \cos \gamma, \quad (26)$$

$$\frac{dy}{dt} = W_{\Gamma}^y + w \cdot \sin \gamma. \quad (27)$$

Обозначим  $W_{\Gamma}^x = u$ ,  $W_{\Gamma}^y = \vartheta$ . Для одномерного случая в начальном участке

$$\vartheta = 0, e'_x = \frac{du}{dy} \sin \gamma, P_x = 0, P_y = 0, e'_y = 0.$$

Поэтому из (17)-(18) получим следующую систему:

$$\frac{dw}{dt} = -k\omega^2 - q \sin \gamma - \omega \frac{du}{dy} \sin \gamma \cos \gamma - \omega \cdot Z - Z \cdot (u \cos \gamma) \quad (28)$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\frac{q \cos \gamma}{\omega} + \frac{du}{dy} \sin^2 \gamma - \frac{Z}{\omega} u \sin \gamma \quad (29)$$

где  $Z$  - параметр, описывающий процесс испарения жидкости с поверхности капель. При отсутствии испарения, система с подстановкой производной от  $u$  в (28)-(29) имеет вид:

$$\frac{dw}{dt} = -k\omega^2 - g \sin \gamma - \frac{3}{y_n^3} (2y - y_n) \sin^2 \gamma, \quad (30)$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\frac{g \cos \gamma}{\omega} - \frac{3}{y_n^3} (2y - y_n) \sin^2 \gamma. \quad (31)$$

Для сформировавшейся капли на начальном участке имеем начальные условия:

$$w(0) = u_0, \gamma(0) = 0, \quad (32)$$

Вышеприведенная упрощенная методика позволяет находить такие интегральные массообменные характеристики работы АМВФ, как время пребывания капель в ступени контакта, долю капель в общем объеме жидкости в аппарате и в конечном итоге – оценить эффективность массообмена в аппарате.

Условные обозначения:  $d$ - диаметр капли, м;  $d_{mod}$  – диаметр наиболее часто встречающихся капель, м;  $k$ - кинетическая энергия турбулентных пульсаций;  $l$ - локальный масштаб турбулентных пульсаций;  $m$ - число делений в конечно-разностной сетке по направлению  $y$ ;  $n$  - число делений в конечно-разностной сетке по направлению  $x$ ;  $u, v$ - составляющие скорости газа по продольному и поперечному координатам;  $\vec{e}$  - единичный вектор направления относительной скорости капли;  $\gamma$  - угол между относительной скоростью и скоростью капли;  $x, y$  – координаты капли.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта 0745/ГФ.

## ЛИТЕРАТУРА

- 1 Балабеков О.С. Закономерность взаимодействия вихрей, возникающих при отрывном обтекании потоком газа или жидкости дискретно расположенного вдоль него тел. Диплом об открытии № 144, 2000.
- 2 Волненко А. А. Научные основы разработки и расчета вихревых массообменных и пылеулавливающих аппаратов: Автореф. дис. докт. Шымкент. 1999.40с.
- 3 Исмаилов Б.Р. Моделирование многоступенчатого взаимодействия газа и жидкости в колонных массообменных аппаратах. Автореф. дис. докт. Шымкент.2002.40с.
- 4 L.P. Kholpanov, B.R. Ismailov, O.S. Balabekov, Distribution of Gas Flow parameters in mass transfer columns with regularly spaced shelves. // Theoretical foundations of chemical engineering. 2008. №5. pp.409-413.
- 5 B.R. Ismailov, L.P. Kholpanov, P. Vlasic, Modeling of multiphase flow containing bubbles, drops and solid particles. // Engineering mechanics.2009.№6, pp.441-451.
- 6 B. Ismailov, A. Urmatova, Kh. Mathematical Modelling and Calculation of Dynamic Characteristics of Gas in Multistage Channels. // Applied Mathematical Sciences. 2013. Vol. 7. № 132. pp. 6571 – 6582.
- 7 Кутепов А.М., Полянин А.Д. и др. Химическая гидродинамика: справочное пособие. М.: Бюро Квантум, 1996. 336 с.
- 8 Бренер А.М., Болгов Н.П. и др. Упрощенная модель движения капли в газовом потоке // Теоретические основы химических технологий. 1987. Т.21. №1. С.126-130.]
- 9 Бренер А.М., Сейтжанов К., Жумартбаев Э.У. Моделирование движения капель в стационарных вихревых зонах тепломассообменных аппаратов// Респ.научн.журн. Наука и образование Южного Казахстана. 1996.№2. С. 178-179.

---

## REFERENCES

- 1 Balabekov O.S. Zakonomernost' vzaimodejstvija vihrej, voznikajushhih pri otryvnom obtekaniu potokom gaza ili zhidkosti diskretno rastpolozhennogo vdol' nego tel. *Diplom ob otkrytii.* № 144, **2000.** (in Russ.)
- 2 Volnenko A. A. Nauchnye osnovy razrabotki i rascheta vihrevyh massaobmennyh i pyleulavlivajushhih apparatov: *Avtoref. dis. dokt. Shymkent.* **1999.** 40s. (in Russ.)
- 3 Ismailov B.R. Modelirovanie mnogostupenchatogo vzaimodejstvija gaza i zhidkosti v kolonnyh massaobmennyh apparatah. *Avtoref. dis. dokt. Shymkent.* **2002.** 40s. (in Russ.)
- 4 L.P. Kholpanov, B.R. Ismailov, O.S. Balabekov, Distribution of Gas Flow parameters in mass transfer columns with regularly spaced shelves. *Theoretical foundations of chemical engineering.* **2008.** №5. pp.409-413.
- 5 B.R. Ismailov, L.P. Kholpanov, P. Vlasic, Modeling of multiphase flow containing bubbles, drops and solid particles. *Engineering mechanics.* **2009.** №6. pp.441-451.
- 6 B. Ismailov, A. Urmatova, Kh. Mathematical Modelling and Calculation of Dynamic Characteristics of Gas in Multistage Channels. *Applied Mathematical Sciences.* **2013.** Vol. 7. № 132. pp. 6571 – 6582.
- 7 Kuteporov A.M., Poljanin A.D. i dr. *Himicheskaja gidrodinamika: spravochnoe posobie.* M.: Bjuro Kvantum, **1996.** 336 s. (in Russ.)
- 8 Brener A.M., Bolgov N.P. i dr. Uproshchennaja model' dvizhenija kapli v gazovom potoke. *Teoreticheskie osnovy himicheskikh tehnologij.* **1987.** T.21. №1. S.126-130. (in Russ.)
- 9 Brener A.M., Sejtzhhanov K., Zhumaertbaev Je.U. Modelirovanie dvizhenija kapel' v stacionarnyh vihrevyh zonah teplomassaobmennyh apparatov. *Resp.nauchn.zhurn. Nauka i obrazovanie Juzhnogo Kazahstana.* **1996.** №2. S. 178-179. (in Russ.)

### Резюме

*B.R. Ismailov, O.S. Balabekov, A.N. Urmatova*

(М.Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті, Шымкент, Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік педагогикалық институты, Шымкент,  
Қ.А.Ясауи атындағы Халықаралық казақ-түрік университеті, Түркістан)

### МАССАУЫСУ АППАРАТТАРЫНЫҢ КӨПСАТЫЛЫ КАНАЛДАРЫНЫҢ БАСТАПҚЫ ТАРАУЫНДАҒЫ ГАЗ-ТАМШЫ ҚОСПАСЫ МІНЕЗДЕМЕЛЕРІНІН ТАРАЛЫМЫН МАТЕМАТИКАЛЫҚ ҮЛГІЛЕУ

Пластиналық сантамалы көпсатылы каналдағы газ жылдамдығы және тамшылардың траекториялары табылған. Газ-тамшы қоспасының динамикалық мінездемелері тұтас фаза үшін қозғалыс мөлшерінің сақталу тендеулерінің және дисперстік фаза – тамшылар үшін қозғалыс тендеулерінің жүйелерін сандық тәсілмен шешу арқылы табылған.

**Тірек сөздер:** математикалық үлгілеу, газ-тамшы қоспасы, массауысу аппараты, бастапқы тарауы.

### Summary

*B.R.Ismailov, O.S. Balabekov, A.N. Urmatova*

(The southern Kazakhstan State University of M.Auezov, Almaty,  
South Kazakhstan State Pedagogical Institute, Shymkent,  
International Kazakh-Turkish University of H.A.Yassavi, Turkestan)

### MATHEMATICAL MODELING OF DISTRIBUTED PERFORMANCE GAS AND DROPLES MIXTURE IN THE INITIAL SECTION MULTISTAGE CHANNEL MASS-TRANSFER APPARATUS

Found the field of gas velocity and droplet trajectories in the initial section multi-channel plate nozzles. Dynamic characteristics of gas-droplet mixture found by numerical solution of systems of equations of conservation of momentum for the continuous phase and the dispersed phase-motion of liquid droplets.

**Keywords:** mathematical modeling, mixture of gas and droplets, mass transfer apparatus, initial section.

*Поступила 23.07.2014 г.*