Б. ЖАКАШБАЕВ, Б. Д. ДЮЗБЕНБЕТОВ

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Казахский государственный женский педагогический университет, г. Алматы

Рассмотрим линейное гиперболическое уравнение

$$L(u) = u_{xy} = a(x,y)\cdot u_x + b(x,y)\cdot u_y + c(x,y)\cdot u = 0 \tag{1}$$

в характеристическом треугольнике

$$D = \{x, y \in R : 0 < x < y\},\ a(x,y),\ b(x,y),\ c(x,y) \in c(D).$$

Если $L^*(V) = V_{xy} - (aV)_x - (bV)_y + cV$ – дифференциальный оператор, формально сопряженный с оператором $L(u)$, то для любых функций $u(x,y)$ и $v(x,y) \in c(D)$, u_{ay}, v_{ay}, u_{yx}, $v_{yx} \in c(D)$ справедливо тождество Грина в этой области [1].

$$2\left[vL(u) - uL^*(v)\right] = \left(vu_y - uv_y - 2cv\right)_x - \left(uv_x - vu_x - 2buv\right)_y.$$

Из этого тождества следует, что если $L(u) \equiv 0$ в области D, то

$$\left(vu_x - uv_x + 2buv\right)_y = \left(uv_y - vu_y - 2auv\right)_x$$

в D. Для $P(x,y) = vu_x - uv_y - 2buv$, $Q(x,y) = uv_y - vu_y - 2auv$ в области D выполнены условия известного признака полного дифференциала в односвязной области $D[L]$. Поэтому выражение $\left(vu_x - uv_x - 2buv\right)dx + \left(uv_y - vu_y - 2auv\right)dy$ является полным дифференциалом в области D, т.е. существует функция $u^*(x,y)$ такая, что

$$du^* = \left(vu_x - uv_x - 2buv\right)dx + \left(uv_y - vu_y - 2auv\right)dy.$$

Исходя из формулы первого дифференциала функции двух переменных, последнее дифференциальное равенство можно записать в виде системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} u_x^* = vu_x - uv_x + 2buv \\ u_y^* = vu_y - uv_y - 2auv \end{cases} \tag{2}$$

Если $M_0(x_0, y_0)$ – некоторая фиксированная, а $M(x,y)$ – переменная точки области D, то функция $u^*(x,y)$ восстанавливается (с точность до произвольного постоянного слагаемого) по своему полному дифференциалу по формуле

$$u^*(x,y) = u^*(x_0,y_0) + \int_{M_0}^{M} \left(vu_s - uv_s - 2buv\right)ds + \left(uv_t - vu_t - 2auv\right)dyt, \tag{3}$$

где s и t – переменные интегрирования, а криволинейный интеграл не зависит от формы дуги интегрирования M_0M [2]. Функция $u^*(x,y)$ названа нами потенциалом сопряженной пары $u(x,y)$ и $v(x,y)$ [3].

$u^*(x,y)$ является решением гиперболического уравнения в области D, причем при $a_y = b_x$ это уравнение имеет вид:

$$a^*_{xy} + \left(a - \frac{v_y}{v}\right)u^*_x + \left(a - \frac{v_y}{v}b\right)u^*_y = 0 \tag{4}$$

Выбирая частные решения $v(x,y)$ сопряженного уравнения $L^*(v) = 0$, получим класс уравнений вида (4) и если $u(x,y)$ – общее решение исходного уравнения (1), то формула (3) определяет общее решение каждого уравнения класса (4).

Такой подход позволяет находить решения начальных и краевых задач уравнений (4), зная решения соответствующих задач для уравнения (1).

Исходя из соотношений (2), можно сформулировать начальные или граничные условия для уравнений (4).

Потенциалы сопряженных пар рассматривались нами и для вырождающихся гиперболических уравнений, например, для уравнений Эйлера-Пуассона-Дарбу

$$u(x,y) + \frac{\beta}{y-x}u_x - \frac{\alpha}{y-x}u_y = 0\ , \tag{5}$$

коэффициенты которого сингулярны на границе $y = x$ области D. α, β – вещественные параметры [1]. Потенциал $u^*(x,y)$ этого уравнения определяется системой уравнений:

$$\begin{cases} u^*_x = \dfrac{2\alpha}{\alpha+\beta}(y-x)^{\alpha+\beta}u_x \\ u^*_y = -\dfrac{2\alpha}{\alpha+\beta}(y-x)^{\alpha+\beta}u_y \end{cases}$$

или криволинейным интегралом

$$u^*(x,y) = u^*(0,0) + \int_{(0,0)}^{(x,y)} \frac{2\beta}{\alpha+\beta}(t-s)^{\alpha+\beta}\cdot u_s ds - \int_{(0,0)}^{(x,y)} \frac{2\beta}{\alpha+\beta}(t-s)^{\alpha+\beta}\cdot u_t dt \tag{6}$$

(для значений параметров α, β, при которых интеграл сходится). Так как $u^*(x,y)$ в области D вновь является решением уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу с параметрами $(-\alpha)$ и $(-\beta)$, т.е.

$$u^*(x,y) + \frac{(-\alpha)}{y-x}u^*_x - \frac{(-\beta)}{y-x}u^*_y = 0,$$

то $u^*(x,y)$ является продолжением решения уравнения (5) для отрицательных значений параметров α и β, а формула (6) – интегральным представлением этого продолжения.

Вопрос об исследовании потенциалов сопряженных пар для интегральных представлений решений гиперболических уравнений и продолжения решения уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу по параметрам рассмотрен в [5].

ЛИТЕРАТУРА

1 Копляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Дифференциальные уравнения математической физики. – М., 1964.
2 Кудрявцев Л.Д. Математический анализ. – Т. 1, 2. – М.: Высшая школа, 197.
3 Корн Г., Корню Т. Справочник по математике. – М.: Наука, 1973.

Б. Жақашбаев, Б. Д. Дүзбенбетов

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ТЕОРИЯСЫНЫҢ КЕЙБІР МӘСЕЛЕЛЕРІ

Гиперболалық дифференциальдық теңдеулердің жалғыз ғана шешімі бар екендігі дәлелденген.

B. Zhakashbayev, B. D. Dyuzbenbetov

SOME QUESTIONS OF THE THEORY OF THE DIFFERENTIAL EQUATIONS

Hyperbole differential the equation proved the uniquencess of the solution.