

СВЯЗЬ ХАОТИЧЕСКИХ ФЛУКТУАЦИЙ ПРОВОДИМОСТИ СО СТАТИСТИКОЙ УРОВНЕЙ ЭНЕРГИИ ЭЛЕКТРОНОВ В НЕУПОРЯДОЧЕННЫХ КВАНТОВЫХ СИСТЕМАХ

Рассматривается статистика кондактанса неупорядоченной системы на переходе металл–изолятор. Вычисляется дисперсия числа электронных уровней при изменении хаотического потенциала.

Введение. Хаотические мезоскопические флуктуации в неупорядоченных системах возникают на основе квантово-интерференционных явлений. Различные неупругие процессы в твердом теле при конечных температурах характеризуются расстоянием, называемым длиной когерентности, в пределах которого сохраняется память о фазе волновой функции электронов, рассеивающихся на случайном примесном потенциале. Если размеры неупорядоченного образца меньше, чем длина когерентности, то доминирующую

роль в переносе заряда играет интерференция электронных волн, что приводит к возникновению хаотических флуктуаций проводимости.

Впервые мезоскопические флуктуации наблюдались в металлических образцах размером порядка 1 мкм в магнитном поле при температуре меньше 1° К. Графики измеренного магнитосопротивления представляли собой апериодические, шумоподобные осцилляции, воспроизводимые во времени для каждого образца [1]. Такие же флуктуации проявляет сопротивление инверсионного

канала MOSFET-транзистора при изменении напряжения на затворе, т.е. при изменении положения уровня Ферми.

После работы Таулесса [2] стало понятно, что проводимость образца с размером L при низкой температуре $T \ll E_c$ определяется однозелектронными уровнями энергии, лежащими в полосе ширины $E_c = \hbar D/L^2$, центрированной на уровне Ферми, где D – коэффициент диффузии электронов, L^2/D – характерное время диффузии электрона через весь образец. Средний по реализациям случайного потенциала кондактанс d -мерного куба $G = \sigma L^{d-2}$, измеренный в единицах e^2/\hbar , равен просто среднему числу этих уровней:

$$G = e^2 h (e_c / \Delta) = (e^2 / \hbar) \langle N(E_c) \rangle, \quad (1)$$

Альтшулер и Шкловский [3, 4] обратили внимание на то, что и флуктуации кондактанса от одной реализации к другой в значительной степени определяются соответствующими флуктуациями числа состояний в полосе E_c : $\langle \delta G^2 \rangle = (e^2/\hbar) \langle \delta N^2(E_c) \rangle$. В этой связи в [5] изучался вопрос о дисперсии

$$\langle \delta N^2(E) \rangle = \langle [N(E) - \langle N(E) \rangle]^2 \rangle, \quad (2)$$

числа уровней в произвольном интервале энергии E . Угловые скобки означают усреднение по ансамблю реализаций. При этом рассматривалась случай, когда $\langle N(E) \rangle$ мало по сравнению с полным числом уровней в системе. Величина $\langle \delta N^2(E) \rangle$ в металлическом образце определялась при помощи примесной диаграммной техники в той области параметров, в которой $L \gg l \gg \lambda$, где l и λ – соответственно длина свободного пробега и длина волны электрона.

1. Отталкивание уровней энергии. Ранее Дайсон [6], имея в виду задачу о статистике уровней энергии в сложных ядрах, рассмотрел аналогичную задачу для собственных значений ансамбля случайных матриц, все элементы которых нормально распределены вокруг нуля с одинаковой дисперсией.

Для дисперсии в простейшем случае вещественных симметрических матриц (ортогонального ансамбля) Дайсон получил

$$\langle \delta N^2 \rangle = \frac{2}{\pi^2} [\ln \langle N(E) \rangle + B] = \langle \delta N^2 \rangle_D, \quad (3)$$

где $B \approx 2,18$. Интересной особенностью формулы (3) является малость флуктуаций $\langle \delta N^2 \rangle \ll \langle N(E) \rangle$.

Это значит, что последовательность уровней сильно отличается от случайной пуассоновской, у которой должно быть $\langle \delta N^2 \rangle = \langle N(E) \rangle$. Дополнительная «жесткость» системы уровней возникает за счет их квантово-механического отталкивания.

Если энергетические уровни имеют затухание γ , связанное с возможностью выхода частицы из образца, то величина $\langle N(E) \rangle$ в правой части (3) заменяется на E/γ , а при $\gamma \sim E$ дисперсия $\langle \delta N^2 \rangle$ оказывается порядка единицы, т.е. еще меньше, чем значение $\langle \delta N^2 \rangle_D$. Последний результат согласуется с универсальностью флуктуаций кондактанса открытого металлического образца, для которого $\langle \delta G^2 \rangle = (e^2/\hbar)^2$ [1].

При $E \ll E_c$ за характерное время \hbar/E электрон успевает обежать только малую часть металлического образца – кубик размером $L_E = \sqrt{D} \hbar/E$. Отдельные маленькие кубики обладают почти независимыми системами уровней. Поэтому флуктуации числа уровней во всем образцу пропорциональны числу кубиков $(L/L_E)^3$.

$$\langle \delta N^2 \rangle = \langle \delta n^2 \rangle (L/L_E)^3 = \frac{\sqrt{2}}{6\pi^3} (E/E_c)^{3/2}, \quad (4)$$

где $\langle \delta n^2 \rangle$ – дисперсия числа уровней в кубике размером L_E в полосе энергии E . Поскольку этот кубик является открытым, то $\gamma \sim O/L_E^2 = E$ и $\langle \delta N^2 \rangle \sim 1$. Из формулы (4) видно, что в области металлической проводимости величина $\langle \delta N^2 \rangle$ независимо от граничных условий существенно больше Дайсоновской дисперсии $\langle \delta N^2 \rangle_D$ и зависит от E_c , т.е. от кондактанса G . Ясно, что статистика уровней энергии, в отличие от среднего числа уровней $\langle N(E) \rangle$, должно быть чувствительной к переходу металл–диэлектрик.

2. Дисперсия на переходе в критической точке. Опишем качественно и количественно зависимость дисперсии $\langle \delta N^2(E) \rangle$ от энергии E при переходе от хорошего металла через критическую область в диэлектрическое состояние.

Рассмотрим зависимость дисперсии числа уровней вне критической области перехода металл–диэлектрик, т.е. в хорошем металле и диэлектрике с сильно локализованными состояниями электронов. В хорошем металле, когда $\ell \gg \lambda$, при достаточно малых энергиях E величина $\langle \delta N^2 \rangle$ описывается формулами (3) и (4). Эти зависимости справедливы до тех пор, пока L_E

больше длины свободного пробега ℓ , т.е. $E \ll \hbar/\tau$, где τ – время свободного пробега. При уменьшении ℓ и приближении ее к λ растет $\langle\delta N^2\rangle$ и уменьшается E_c для полос шириной $E > E_c$. При $\ell \approx \lambda$, т.е. на границе критической области, \hbar/τ становится порядка энергии Ферми $\mu = \hbar^2/m\lambda^2$ – максимального масштаба энергий. При $E < \hbar^2/mL^2$ справедлива формула (3), а при $\hbar^2/mL^2 < E < \mu$ – формула (4).

С другой стороны, ясно, что диэлектрической фазе вдали от перехода металл–диэлектрик соответствует абсолютно случайное распределение уровней по энергии. В этом случае перекрытием волновых функций можно пренебречь, поскольку они локализованы на отдельных узлах решетки. При этом распределение уровней становится пуассоновским, так что дисперсия $\langle\delta N^2\rangle$ максимальна:

$$\langle\delta N^2\rangle \approx \langle N(E)\rangle. \quad (5)$$

Таким образом, известна зависимость $\langle\delta N^2\rangle$ от E по обе стороны критической области перехода металл–диэлектрик.

Для того, чтобы проследить, как происходит переход между ними, рассмотрим поведение дисперсии $\langle\delta N^2\rangle$ в критической точке. Согласно теории подобия, контактанс образца при нулевой температуре в точке перехода зависит от пространственного масштаба и равен $G_c = 0,03 e^2/h$. Так как для всех энергий E , больших среднего расстояния между уровнями энергии Δ , в точке перехода выполнено неравенство $E \gg E_c$, то, используя соотношение (4), получим

$$\frac{\langle\delta N^2\rangle}{\langle N(E)\rangle} = \frac{\sqrt{2}}{6\pi^3} \frac{gEL^3(e^2/h)}{G_c \langle N(E_c)\rangle} = \kappa, \quad (6)$$

где $\kappa \approx 0,25$. Следовательно, в критической точке так же, как и в глубоком диэлектрике $\langle\delta N^2\rangle \approx \langle N(E)\rangle$, однако, величина флуктуаций $\langle\delta N^2\rangle$ примерно в четыре раза меньше.

Цель моделирования состояла в том, чтобы исследовать зависимость $\langle\delta N^2\rangle$ от E при различной степени неупорядоченности системы в рамках модели Андерсона, гамильтониан которой имеет вид

$$H = \sum_{n\sigma} \varepsilon_n a_{n\sigma}^\dagger a_{n\sigma} + I \sum_{\langle n,m \rangle, \sigma} (a_{n\sigma}^\dagger a_{m\sigma} + a_{n\sigma} a_{m\sigma}^\dagger), \quad (7)$$

где $a_n^\dagger (a_n)$ – операторы рождения (уничтожения) электрона на узле n решетки; ε_n – энергия узла n , равномерно распределенная в интервале $[-V/2, V/2]$ интеграл перекрытия между узлом n и ближайшими к нему в решетке узлами m .

Матрица гамильтониана (7) диагонализовалась при помощи ЭВМ для простой кубической решетки из $32 \times 32 \times 32$ узлов с периодическими граничными условиями. Далее подсчитывалось N и N^2 в полосах энергии разной ширины вблизи центра зоны, после чего полученные величины усреднялись по 200 реализациям.

Вычисленные зависимости отношения $\langle\delta N^2\rangle / \langle N(E)\rangle$ от $\langle N(E)\rangle$ при различных значениях степени неупорядоченности V показаны на рис. 1. Видно, что, во-первых, в хорошем металле $V/I=12$ зависимость $\langle\delta N^2(E)\rangle$ почти совпадает с формулой Дайсона (3). Меньшие значения беспорядка $V/I < 12$ не рассматривались, поскольку в этом случае длина свободного пробега становится больше размеров куба. Во-вторых, в точке перехода $V/I = 16,5$ отношение $\langle\delta N^2\rangle / \langle N(E)\rangle$ не слишком далеко от 0,3, что согласуется с формулой (6). Наконец, при большом беспорядке $V \gg V_c$ справедливо выражение (5). Из рис. 1 также видно, что в хорошем металле $V/I=12,14$ отличие $\langle\delta N^2\rangle$ от дайсоновской дисперсии $\langle\delta N^2\rangle_d$ (3) невелико. Однако оно является заметным и растет с ростом как E , так и V .

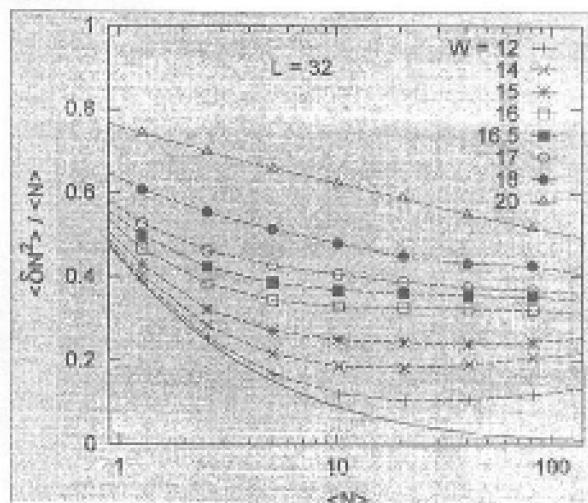


Рис. 1. Полученные в компьютерном эксперименте зависимости $\langle\delta N^2\rangle / \langle N(E)\rangle$ от $\langle N(E)\rangle$ для размера образца $L=32$ для различной степени беспорядка $V=V/I$. Сплошная линия соответствует формуле Дайсона (3); верхняя линия – формуле (5).

3. Поправка к формуле Дайсона. Интересной представляется поправка к формуле Дайсона (3) в области слабой локализации. В работе [4] при помощи диаграммной техники показано, что в металлической области отличие среднего квадрата флукутаций числа состояний в полосе ширины E от дайсоновского значения дисперсии описывается соотношением, которое выводится на основе непертурбативной теории примесной диаграммной техники.

Заметим, что при $E \gg 4\pi^2 E_c$ это соотношение переходит в (4). В другом предельном случае при малых энергиях $E \ll 4\pi^2 E_c$ имеем

$\sqrt{\langle \delta N^2 \rangle - \langle \delta N \rangle^2_D} = C(e^2/hG) \langle N \rangle$, где
 $C=0,033$. Следовательно, в хорошем металле кон-
дактанс можно сравнительно легко находить,
изучая $\langle \delta N^2 \rangle$ при небольших значений $\langle N \rangle$. Это
продемонстрировано на рис. 2.

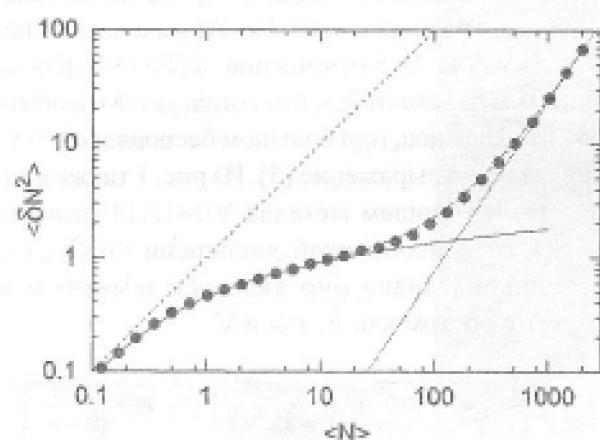


Рис. 2. Зависимость дисперсии числа уровней $\langle\delta N\rangle$ от $\langle N(E)\rangle$ для размера образца $L=48$ в критической точке перехода $W=V/L=16.5$. Штриховая линия — формула (5), пунктирная — формула (4). Точки — результаты, полученные в данной работе.

С другой стороны, кондактанс куба при слабом беспорядке, т.е. при малом V/L , вычисляется аналитически, если учесть рассеяние электрона на каждом узле модели Андерсона в борновском приближении. Определяя в центре зоны плотность состояний q и коэффициент диффузии D , имеем

$$G = Dg e^2 L = \frac{e^2}{h} (1,17/V^2) \cdot (L/a) \cdot I^2. \quad (8)$$

Подставляя в (8), получим, что при $E \ll 4\pi^2 E_z$ в кубической системе с $L = 32a$ ($\langle \delta N^2 \rangle - \langle \delta N \rangle^2_B$) $1/2 = 0,057 \langle N \rangle V^2$. Результаты численного эксперимента, проведенного в работе, сравниваются с аналитическим соотношением (8). При малых $\langle N \rangle V^2$ общий характер зависимости $\langle \delta N^2 \rangle - \langle \delta N \rangle^2_B$ от $\langle N \rangle V^2$ согласуется с соотношением выведенным ранее [7]. Однако тангенс угла наклона несколько меньше, чем 0,057, так как уже при $V/l=12$ имеем $\ell \approx a$, т.е. рассеяние слабое. В этом случае удается подправить борновское приближение введением множители в (9) более высокого порядка по V^2 . С приближением к критической области $V/l=16,5$ отличие от дайсоновской теории быстро нарастает и, более того разность $\langle \delta N^2 \rangle - \langle \delta N \rangle^2_B$ не стремится к нулю при уменьшении V^2 , что по-видимому, является признаком перехода металл–изолятар.

ЛИТЕРАТУРА

1. Washburn S., Webb A. Adv. Phys. 1986, V. 35, N 4. P. 375-342.
 2. Thouless D.J. // Phys. Rep. 1974, V. 13, N 3. P. 93-142.
 3. Mehta M.L. Random Matrices Academic Press, Boston, 1991. 523 p.
 4. Альтишузер Б.Л., Шкляевский Б.И. // ЖЭТФ. 1986. Т. 91, N 7. С. 220-234.
 5. Zharekeshev I.Kh., Kramer B. // Jap. J. Appl. Phys. 1995. V. 34. P. 4361-4366.
 6. Дайсон Ф. Статистическая теория энергетических уровней сложных систем / Под ред. Я. А. Смородинского. М.: изд. 1963. 123 с.
 7. Альтишузер Б.Л., Жарекешев И.Х., Котомичева С.А., Шкляевский Б.И. // ЖЭТФ. 1988. Т. 94, N 3. С. 343-355.

Резюме

Металл-изолятор ауысындағы реттелмеген жүйенің кондактанстың статистикасы қарастырылады. Хостиқ, алеует озгерген кездеңгі электрондық деңгейлердің дисперсия саны есептеледі.

Summary

The statistics of the conductance of disordered system at the metal-insulator transition is considered. The variance of the electron levels number is calculated when changing the chaotic parameter.

Key words: disordered systems, electronic transport, metal-insulator transition.

*КазНУ им. аль-Фараби,
г. Алматы*

Поступило 25.02.10г.