УДК 629.195.01

К. С. ЖИЛИСБАЕВА

# ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ ИСКУССТВЕННОГО НЕБЕСНОГО ТЕЛА В ПЕРЕМЕННЫХ ДЕЙСТВИЕ-УГОЛ

Рассматривается возмущенное движение симметричного спутника-гиростата в геомагнитном поле. Методом Хори-Депри найдены решения уравнения возмущенного движения спутника-гиростата в переменных действие-угол.

**Введение.** Исследование движения искуственных небесных тел с учетом различного рода малых возмущений существенно облегчается, если использовать канонические переменные действие-угол.

Гамильтониан невозмущенной задачи, записанный в переменных действие-угол $(I_1, I_2, I_3, w_1, w_2, w_3)$ зависит только от действий $I_1, I_2, I_3$, а система канонических уравнений Гамильтона принимает простой вид:

$$\frac{dI_i}{dt} = 0\ ,\ \frac{dw_i}{dt} = \omega_i(I_1, I_2, I_3)$$

$$\omega_i = \frac{\partial \mathrm{H}_0(I_1, I_2, I_3)}{\partial I_i}\ ,\ (i = 1,2,3)$$

и немедленно интегрируется

$$I_i = I_i^0\ ,\ w_i(t) = \omega_i t + w_i^0\ .$$

Функция Гамильтона возмущенной задачи, выраженная через координаты действие-угол, имеет вид:

$$\mathrm{H}(I, w, \varepsilon) = \mathrm{H}_0(I) + \varepsilon \mathrm{H}_1(I, w), \qquad (1)$$

где $w = (w_1, w_2, w_3)$, $I = (I_1, I_2, I_3)$, $\mathrm{H}_1(I, w)$ – пертурбационная функция; $\varepsilon$ – малый параметр.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим возмущенное движение вокруг центра масс намагниченного динамически симметричного спутника-гиростата в геомагнитном поле. Размеры спутника-гиростата предполагаются малыми по сравнению с размерами орбиты, поэтому принимается допущение о независимости движения центра масс от движения вокруг центра масс. Центр масс спутника движется по круговой орбите в экваториальной плоскости, а вращательное движение определяется в основном взаимодействием его магнитного момента с магнитным полем Земли, моделируемого прямым диполем. Тогда вектор $\vec{\mathrm{H}}$ напряженности геомагнитного поля направлен по нормали к плоскости орбиты спутника и имеет постоянное значение $\vec{\mathrm{H}}$ =const. Как известно, при помещении намагниченного тела в магнитное поле напряженности $\vec{\mathrm{H}}$ на это тело будет действовать момент сил, определяемый формулой [1]:

$$\vec{\mathrm{M}} = \vec{\mathrm{I}} \times \vec{\mathrm{H}}\ ,$$

где $\vec{\mathrm{I}}$ – магнитный момент тела. Магнитный момент на спутнике возникает как из-за наличия на нем функционирующих электрических систем и постоянных магнитов, так и из-за намагничивания металлического корпуса спутника. Будем считать, что магнитный момент спутника $\vec{\mathrm{I}}$ складывается из постоянной составляющей $\vec{I}_0$ и магнитного момента оболочки $\vec{I}_H$ :

$$\vec{I} = \vec{I}_0 + \vec{I}_H\ .$$

Известно [1], что достаточно вытянутое симметричное тело намагничивается в магнитном поле в основном вдоль своей оси симметрии. Предположим, что ось симметрии оболочки спутника совпадает с одной из его главных центральных осей инерции, например, осью z.

Предположим, что спутник вдоль своих главных осей инерции несет симметричные роторы, которые при своем вращении не меняют распределения масс спутника и обладают постоянным относительно спутника моментом количества движения.

При исследовании движений намагниченного спутника-гиростата учтены малые возмущения,

вызванные наличием на борту симметричных роторов и намагничиванием оболочки спутника.

**2. Функция Гамильтона возмущенного движения.** Переход к переменным действие-угол будем проводить, следуя работе Аксепенковой И. М. [2]. Имеют место четыре возможных случая:

I) $I_2 > |I_3|$, II) $I_3 > |I_2|$,

III) $I_2 < -|I_3|$, IV) $I_3 < -|I_2|$.

Следовательно, достаточно рассматривать только первые два случая. В первом случае функция Гамильтона возмущенной задачи, выраженная через координаты действие-угол, имеет вид:

$$\text{I) } \mathrm{H}_0(I) = \frac{(I_1+I_2)^2}{2B} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{C}-\frac{1}{B}\right)I_2^2 + m\omega^2 B\frac{I_2 I_3}{2(I_1+I_2)^2} + \ldots$$

$$\begin{aligned}\mathrm{H}_1(I,w) = B\omega^2\{&\varepsilon_1[mB^{(1)}_{-3,1}\sin(w_2-3w_1)+ \\ &+(B^{(0)}_{-2,1}+mB^{(1)}_{-2,1})\sin(w_2-2w_1)+(B^{(0)}_{-1,1}+mB^{(0)}_{-1,1})\times \\ &\times\sin(w_2-w_1)+(B^{(0)}_{0,1}+mB^{(1)}_{0,1})\sin w_2+mB^{(1)}_{1,1}\times \\ &\times\sin(w_1+w_2)+\ldots]+\varepsilon_2[mB^{(1)}_{-3,1}\cos(w_2-3w_1)+ \\ &+(B^{(0)}_{-2,1}+mB^{(1)}_{-2,1})\cos(w_2-2w_1)+(B^{(0)}_{-1,1}+ \\ &+mB^{(1)}_{-1,1})\cos(w_2-w_1)+(B^{(0)}_{0,1}+mB^{(1)}_{-0,1})\cos w_2+ \\ &+mB^{(1)}_{1,1}\cos(w_1+w_2)]+\varepsilon_3[C^{(0)}_{0,0}+mC^{(1)}_{0,0}+ \\ &+(C^{(0)}_{1,0}+mC^{(1)}_{1,0})\cos w_1+mC^{(1)}_{2,0}\cos 2w_1]+ \\ &+\varepsilon_4[D^{(0)}_{0,0}+mD^{(1)}_{0,0}+(D^{(0)}_{1,0}+mD^{(1)}_{1,0})\cos w_1+ \\ &+(D^{(0)}_{2,0}+mD^{(1)}_{2,0})\cos 2w_1+mD^{(1)}_{3,0}\cos 3w_1]\}+\ldots \quad (2)\end{aligned}$$

Здесь B = A, C – главные моменты инерции спутника; m – безразмерный малый параметр; ω – скорость обращения спутника по орбите; $\varepsilon_i$ –малые величины; $B^{(k)}_{i,j}, C^{(k)}_{i,j}, D^{(k)}_{i,j}$ – коэффициенты, зависящие от переменных действия.

**3. Решение возмущенной задачи методом Хори-Депри.** Применим для исследования системы с гамильтонианом вида (2) метод Хори-Депри. Этот метод был разработан Дж. Хори [3] и независимо А. Депри [4]. Благодаря этому методу, стало возможным существенно алгоритмизировать классические методы теории возмущений.

После работ Хори и Депри появился ряд исследований, посвященных более детальной разработке метода Хори-Депри и его различным модификациям [5].

Определим каноническую замену переменных $I, w \to \tilde{I}, \tilde{w}$, где $I = \{I_1, I_2, I_3\}$, $w = \{w_1, w_2, w_3\}$ – старые переменные, $\tilde{I} = \{\tilde{I}_1, \tilde{I}_2, \tilde{I}_3\}$, $\tilde{w} = \{\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \tilde{w}_3\}$ – новые переменные. Тогда по методу Хори-Депри имеем

$$I = \tilde{I} - \frac{\partial S}{\partial \tilde{w}} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial \tilde{w}}, S\right) - \ldots,$$

$$w = \tilde{w} + \frac{\partial S}{\partial \tilde{I}} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial \tilde{I}}, S\right) + \ldots, \quad (3)$$

Здесь все функции, стоящие в правой части, зависят от новых переменных $\tilde{I}, \tilde{w}$. Для определения обратной замены получим

$$\tilde{I} = I + \frac{\partial S}{\partial w} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial w}, S\right) + \ldots,$$

$$\tilde{w} = w - \frac{\partial S}{\partial I} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial I}, S\right) - \ldots \quad (4)$$

Все функции, стоящие в правой части, зависят от старых переменных $I, w$.

Здесь $S$ – производящая функция, индуцирующая каноническую замену переменных, явные формулы которой суть (3) и (4).

Пусть $K$ – гамильтониан задачи, выраженный через новые переменные. Тогда

$$K(\tilde{I}, \tilde{w}, \varepsilon) = \mathrm{H}(I, w, \varepsilon),$$

так как замена переменных (12) и (13) не зависит от времени.

Как известно [5],

$$K(I, w, \varepsilon) = \exp_S \mathrm{H}, \quad (5)$$

где $\exp_S \mathrm{H}$ обозначен оператор, значение которого на функции $\mathrm{H}$ есть

$$\exp_S \mathrm{H} = \mathrm{H} + (\mathrm{H}, S) + \frac{1}{2}((\mathrm{H}, S), S) + \frac{1}{n!}(\ldots(\mathrm{H}, S)\ldots, S).$$

Новую функцию Гамильтона $K(I,w,\varepsilon)$ и производящую функцию $S(I,w,\varepsilon)$ будем искать в виде рядов по малому параметру $\varepsilon$:

$$S=\sum_{m=1}^{\infty}\varepsilon^m S_m(I,w);\ K=\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^m K_m(I,w).$$

Приравнивая члены одинакового порядка по ε в правой и левой частях соотношения (5), получим:

$$(S_m,\mathrm{H}_0)=F_m-K_m, \qquad (6)$$

где $F_m$ определяется как некоторая комбинация скобок Пуассона функций $S_1,S_2,...,S_{k-1},\mathrm{H}_0,\mathrm{H}_1$.

Задавая посредством какого-либо правила вид преобразованного гамильтониана $K$ и решая систему (6) относительно $S_j$ для всех целых чисел $j$, определим каноническую замену переменных, преобразующую гамильтониан $\mathrm{H}$ к виду $K$.

После преобразования формула (6) имеет вид:

$$\omega_i\frac{\partial S_m}{\partial w_i}+K_m=F_m.$$

В выражение производящей функций $S$ неизбежно войдут знаменатели вида $n_1\omega_1+n_2\omega_2$, где $n_1,n_2$ – целые числа, которые могут обратиться в нуль на резонансной поверхности $n_1\omega_1+n_2\omega_2=0$. Поэтому генератор Ли $S$ нельзя задать как аналитическую функцию во всем фазовом пространстве механической системы с гамильтонианом (1).

Рассмотрим нерезонансный случай. Для случая I) решение в первом приближении уравнений возмущенного движения имеет вид:

$$\text{I)}\ I_1=\tilde I_1-\frac{A_{11}}{A_{12}}\cos(2\tilde w_2-2\tilde w_1)-$$

$$-\frac{A_{21}}{4A_{22}}\cos(2\tilde w_2-\tilde w_1)+$$

$$+\frac{3}{4}\frac{A_{31}}{A_{32}}\cos(2\tilde w_2-3\tilde w_1)-\frac{A_{41}}{A_{42}}\cos\tilde w_1,$$

$$I_2=\tilde I_2+\frac{A_{11}}{A_{12}}\cos(2\tilde w_2-2\tilde w_1)+$$

$$+\frac{A_{21}}{2A_{22}}\cos(2\tilde w_2-\tilde w_1)-\frac{A_{31}}{2A_{32}}\cos(2\tilde w_2-3\tilde w_1),$$

$$I_3=\tilde I_3,$$

$$w_1=\tilde w_1-\frac{B_{11}}{A_{12}^2}\sin(2\tilde w_2-2\tilde w_1)-\frac{B_{21}}{4RA_{22}^2}\sin(2\tilde w_2-\tilde w_1)+$$

$$+\frac{B_{31}}{4RA_{32}^2}\sin(2\tilde w_2-3\tilde w_1)+\frac{B_{41}}{2RA_{42}}\sin\tilde w_1,$$

$$w_2=\tilde w_2+\frac{C_{11}}{A_{12}^2}\sin(2\tilde w_2-2\tilde w_1)-\frac{C_{21}}{4RA_{22}^2}\sin(2\tilde w_2-\tilde w_1)+$$

$$+\frac{C_{31}}{4RA_{32}^2}\sin(2\tilde w_2-3\tilde w_1)+\frac{C_{41}}{2RA_{42}}\sin\tilde w_1,$$

$$w_3=\tilde w_3+\frac{D_{11}}{2A_{12}^2}\sin(2\tilde w_2-2\tilde w_1)+\frac{D_{21}}{4RA_{22}^2}\sin(2\tilde w_2-\tilde w_1)+$$

$$+\frac{D_{31}}{4RA_{32}^2}\sin(2\tilde w_2-3\tilde w_1)+\frac{D_{41}}{2RA_{42}}\sin\tilde w_1,$$

где $A_{ij}$, $B_{ij}$, $C_{ij}$, $D_{ij}$ - коэффициенты, зависящие от переменных действия.

Аналогично находится решение уравнений возмущенного движения спутника-гиростата для случая II).

Полученные результаты позволяют качественно оценить возмущенное движение намагниченного симметричного спутника-гиростата в геомагнитном поле, моделируемом прямым диполем.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Белецкий В.В., Хентов А.А.* Вращательное движение намагниченного спутника. М.: Наука, 1980. 286 с.

2. *Аксёненкова И.М.* Канонические переменные угол-действие в задаче о волчке Лагранжа // Вестник МГУ. Сер. матем. и мех. 1981. № 1. С. 86-90.

3. *Hori G.I.* Theory of general perturbations with unspecified canonical variables // J. Japan Astron. Soc. 1966. 18. № 4. P. 287-296.

4. *Deprit A.* Canonical transformation depending on a small parameter // Celect. Mech. 1969. I. № 1. P. 12-30.

5. *Маркеев А.П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.

**Резюме**

Геомагниттік өрістегі симметриялық серік-гиростаттың ұйытқыған қозғалысы қарастырылады. Серік-гиростаттың ұйытқыған қозғалысының теңдеулерінің шешімдері әсер-бұрыш айнымалылары арқылы Хори-Депри әдісімен табылған.

**Summary**

In work the perturbed movement of the symmetric satellite-gyrostat in a geomagnetic field is considered. Decisions of the equation of the perturbed movement of the satellite-gyrostat in action-angle variables were found by the method of Hori-Depri.

*ДТОО «Институт космических исследований»,*
*АО «Национальный центр космических исследований и технологий»*

*Поступила 26.04.2010г.*