

# *Математическая физика*

---

УДК 519.63; 519.684

*Б. Т. ЖУМАГУЛОВ, У. С. АБДИБЕКОВ, А. А. ИСАХОВ*

## **ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОГО ПЕРЕМЕШИВАНИЯ НА ОСНОВЕ МЕТОДА КРУПНЫХ ВИХРЕЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ**

На основе метода крупных вихрей проведено численное моделирование вентиляции помещения. Разработан численный алгоритм с использованием схемы расщепления по физическим параметрам. Уравнение Пуассона для поля давления решается методом Фурье в сочетании с методом матричной прогонки, которая применяется для определения коэффициентов Фурье. Для решения поставленной задачи применена самая актуальная на сегодняшний день и наиболее эффективная, с точки зрения повышения производительности сложных расчетов, технология параллельного программирования MPI в сочетании с директивами OpenMP. Результаты моделирования представлены в виде трехмерных графиков.

В настоящее время одной из актуальных проблем механики сплошных сред и физики плазмы является моделирование сложных переходных и турбулентных движений с помощью современной вычислительной техники, алгоритмов и подходов прикладной математики. Часто встречающиеся на практике турбулентные течения характеризуются ярко выраженной нестационарностью и нелинейностью происходящих процессов, наличием больших перемещений среды, разнохарактерным и сложным механизмом взаимодействия, диссипацией энергии. Сюда относятся, например, такие газодинамические проблемы, как задачи о течении вслед за движущимся телом, о взаимодействии вдуваемой струи с основным потоком и др.

Среди известных методов численного моделирования трехмерных турбулентных течений необходимо выделить прямое численное моделирование турбулентности и решение осредненных уравнений Навье–Стокса. Для использования прямого численного моделирования требуются достаточно мощные вычислительные ресурсы. С другой стороны, использование осредненных уравнений Навье–Стокса требует намного меньших вычислительных ресурсов, однако использующиеся для замыкания уравнений модели турбулентности не обладают приемлемым универсализмом и не могут применяться для широкого круга прикладных задач.

Метод моделирования крупных вихрей является компромиссным вариантом между прямым

численным моделированием и решением осредненных уравнений Навье–Стокса. В методе крупных вихрей осуществляется решение отфильтрованных по пространству уравнений Навье–Стокса и разрешается движение только крупных вихрей.

В работе исследовалась задача нестационарных турбулентных трехмерных течений для вентиляции помещений. На потолке сделан проем, через который вдувается струя воздуха. В стенах у пола сделаны проемы для выдува воздуха из помещения. На дне рассматриваемой области был задан источник концентрации прямоугольной формы.

В случае течений с большими градиентами особо важную роль играет свойство алгоритма, не искающее получаемые в процессе счета сеточные решения схемными осцилляциями. Если это условие не выполняется, то процесс вычислений может быть либо сильно осложнен, либо вообще невозможен. Наконец, порядок аппроксимации конвективных членов в уравнениях, описывающих течение с вязкостью, должен превышать первый порядок в противном случае либо существует опасность искажения решений из-за схемной вязкости, либо пространственные шаги сетки следует выбирать неразумно малыми.

В настоящей работе рассмотрена задача распространения концентрации в помещении. Математическая модель данного процесса основана на уравнениях Навье–Стокса, описывающих трехмерные нестационарные турбулентные течения и имеют следующий вид [2]:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_j u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial \tau_g}{\partial x_i}; \quad (1)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = 0 \quad (i=1,2,3), \quad (2)$$

где

$$\tau_g = \bar{u}_i \bar{u}_j - \bar{u}_j \bar{u}_i. \quad (3)$$

Уравнения (1) и (2) осреднением по пространству и получаем уравнения Навье–Стокса с дополнительным членом  $\tau_g$ .

Для моделирования распространения концентрации используется трехмерная модель переноса активной примеси в помещении.

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial u_i C}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( (D + \alpha_r) \frac{\partial C}{\partial x_i} \right), \quad (4)$$

$u_i$  – компоненты скорости,  $D$  – коэффициент диффузии,  $\alpha_r = v_r / Pr$ .

Для нестационарных течений определены начальные и граничные условия, удовлетворяющие уравнению (2) [2].

В качестве модели турбулентности используется динамическая модель Смагоринского [5]. Для применения динамической модели проводится двойное осреднение с длиной фильтра  $\bar{\Delta} = 2\Delta$ , тогда

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\bar{\bar{u}}}_i}{\partial t} + \frac{\bar{\bar{\bar{u}}}_j \bar{\bar{u}}_i}{\partial x_j} &= \\ = -\frac{\bar{\bar{\bar{p}}}}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\bar{\bar{\bar{u}}}_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\bar{\bar{\bar{\tau}}}_g}{\partial x_i} - \frac{\partial (\bar{\bar{\bar{u}}}_j \bar{\bar{u}}_i - \bar{\bar{\bar{u}}}_i \bar{\bar{u}}_j)}{\partial x_j}. \end{aligned} \quad (6)$$

Уравнение (1), подвергнутое осреднению с двумя фильтрами длиной  $\bar{\Delta}$  и  $\Delta$  соответственно, имеет следующий вид:

$$\frac{\bar{\bar{\bar{u}}}_i}{\partial t} + \frac{\bar{\bar{\bar{u}}}_j \bar{\bar{u}}_i}{\partial x_j} = -\frac{\bar{\bar{\bar{p}}}}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\bar{\bar{\bar{u}}}_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\bar{\bar{\bar{\tau}}}_g}{\partial x_i} - \frac{\partial \bar{T}_g}{\partial x_i}, \quad (7)$$

где  $\bar{T}_g = \bar{\bar{\bar{u}}}_j \bar{\bar{u}}_i - \bar{\bar{\bar{u}}}_i \bar{\bar{u}}_j$ , из (6) и (7) следует  $\bar{T}_g = \bar{\tau}_g + \bar{u}_j \bar{u}_i - \bar{u}_i \bar{u}_j$ , тогда  $\bar{T}_g$  имеет следующий вид:

$$\bar{T}_g - \frac{1}{3} \delta_{ij} \bar{T}_{kk} = -2(C_s \bar{\Delta})^2 (2\bar{s}_g \bar{s}_g)^{1/2} \bar{s}_g,$$

а напряжения Леонарда имеют вид:

$$\begin{aligned} L_g - \frac{1}{3} \delta_{ij} L_{kk} &= \\ = -2(C_s)^2 \left[ (\bar{\Delta})^2 (2\bar{s}_g \bar{s}_g)^{1/2} \bar{s}_g - (\Delta)^2 (2\bar{s}_g \bar{s}_g)^{1/2} \bar{s}_g \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Из (7) при использовании метода наименьших квадратов находится значение  $C_s$

$$\text{в виде } C_s^2 = -\frac{1}{2} \frac{L_g M_g}{M_k M_k}, \quad \text{где } M_g = \left[ (\bar{\Delta})^2 (2\bar{s}_g \bar{s}_g)^{1/2} \bar{s}_g - (\Delta)^2 (2\bar{s}_g \bar{s}_g)^{1/2} \bar{s}_g \right].$$

Численное решение системы (1)–(2) проводится на разнесенной сетке с использованием схемы против потока второго типа:

$$\frac{\partial u_i \zeta}{\partial x} = \frac{u_R \xi_R - u_L \xi_L}{\Delta x} \quad \text{где } \zeta \text{ может быть } u, v, w$$

$$u_L = \frac{u_i + u_{i-1}}{2}, \quad u_R = \frac{u_{i+1} + u_i}{2}$$

$$\xi_L = \begin{cases} \xi_{i-1}, & u_L > 0 \\ \xi_i, & u_L < 0 \end{cases} \quad \xi_R = \begin{cases} \xi_i, & u_R > 0 \\ \xi_{i+1}, & u_R < 0 \end{cases}$$

и компактной аппроксимации для конвективного члена [2–6]

$$f(x) = \frac{du}{dx};$$

$$\alpha f_{i-1} + \beta f_i + \gamma f_{i+1} = \frac{u_j - u_{j-1}}{h}.$$

Разлагая функцию  $f(x)$  и  $u(x)$  в ряд Тейлора, мы можем определить  $\alpha, \beta, \gamma$ .

Для решения задачи с учетом вышепредложенной модели турбулентности используется схема расщепления по физическим параметрам.

Предлагается следующая физическая интерпретация приведенной схемы расщепления. На первом этапе предполагается, что перенос количества движения осуществляется только за счет конвекции и диффузии. Промежуточное поле скорости находится методом дробных шагов, при использовании метода прогонки. На втором этапе, по найденному промежуточному полу полю скорости, находится поле давления. Уравнение Пуас-

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_j u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}; \quad (1)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} = 0 \quad (i=1,2,3), \quad (2)$$

где

$$\tau_{ij} = \bar{u}_i \bar{u}_j - \bar{u}_j \bar{u}_i. \quad (3)$$

Уравнения (1) и (2) осреднением по пространству и получаем уравнения Навье–Стокса с дополнительным членом  $\tau_{ij}$ .

Для моделирования распространения концентрации используется трехмерная модель переноса активной примеси в помещении.

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial u_i C}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( (D + \alpha_r) \frac{\partial C}{\partial x_j} \right), \quad (4)$$

$u_i$  – компоненты скорости,  $D$  – коэффициент диффузии,  $\alpha_r = v_r / Pr$ .

Для нестационарных течений определены начальные и граничные условия, удовлетворяющие уравнению (2) [2].

В качестве модели турбулентности используется динамическая модель Смагоринского [5]. Для применения динамической модели проводится двойное осреднение с длиной фильтра  $\bar{\Delta} = 2\Delta$ , тогда

$$\begin{aligned} & \frac{\bar{\bar{\bar{u}}}_i}{\partial t} + \frac{\bar{\bar{\bar{u}}}_j \bar{u}_i}{\partial x_j} = \\ & = -\frac{\bar{\bar{\bar{p}}}}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\bar{\bar{\bar{u}}}_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial \bar{\tau}_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial (\bar{\bar{\bar{u}}}_j \bar{u}_i - \bar{\bar{\bar{u}}}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j}. \end{aligned} \quad (6)$$

Уравнение (1), подвергнутое осреднению с двумя фильтрами длиной  $\bar{\Delta}$  и  $\Delta$  соответственно, имеет следующий вид:

$$\frac{\bar{\bar{\bar{u}}}_i}{\partial t} + \frac{\bar{\bar{\bar{u}}}_j \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{\bar{\bar{\bar{p}}}}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\bar{\bar{\bar{u}}}_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}, \quad (7)$$

где  $T_{ij} = \bar{\bar{\bar{u}}}_j \bar{u}_i - \bar{\bar{\bar{u}}}_i \bar{u}_j$ , из (6) и (7) следует  $T_{ij} = \bar{\tau}_{ij} + \bar{u}_j \bar{u}_i - \bar{u}_i \bar{u}_j$ , тогда  $\bar{T}_{ij}$  имеет следующий вид:

$$T_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} T_{kk} = -2(C_s \bar{\Delta})^2 (2\bar{s}_y \bar{s}_y)^{1/2} \bar{s}_{ij},$$

а напряжения Леонарда имеют вид:

$$\begin{aligned} L_y - \frac{1}{3} \delta_{yy} L_{kk} &= \\ &= -2(C_s)^2 \left[ (\bar{\Delta})^2 (2\bar{s}_y \bar{s}_y)^{1/2} \bar{s}_y - (\Delta)^2 (2\bar{s}_y \bar{s}_y)^{1/2} \bar{s}_y \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Из (7) при использовании метода наименьших квадратов находится значение  $C_s$

$$C_s^2 = -\frac{1}{2} \frac{L_y M_y}{M_{kk} M_{yy}}, \quad \text{где}$$

$$M_y = \left[ (\bar{\Delta})^2 (2\bar{s}_y \bar{s}_y)^{1/2} \bar{s}_y - (\Delta)^2 (2\bar{s}_y \bar{s}_y)^{1/2} \bar{s}_y \right].$$

Численное решение системы (1)–(2) проводится на разнесенной сетке с использованием схемы против потока второго типа:

$$\frac{\partial u_i \zeta}{\partial x} = \frac{u_R \zeta_R - u_L \zeta_L}{\Delta x} \quad \text{где } \zeta \text{ может быть } u, v, w$$

$$u_L = \frac{u_i + u_{i-1}}{2}, \quad u_R = \frac{u_{i+1} + u_i}{2}$$

$$\zeta_L = \begin{cases} \zeta_{i-1}, & u_L > 0 \\ \zeta_i, & u_L < 0 \end{cases} \quad \zeta_R = \begin{cases} \zeta_i, & u_R > 0 \\ \zeta_{i+1}, & u_R < 0 \end{cases}$$

и компактной аппроксимации для конвективного члена [2–6]

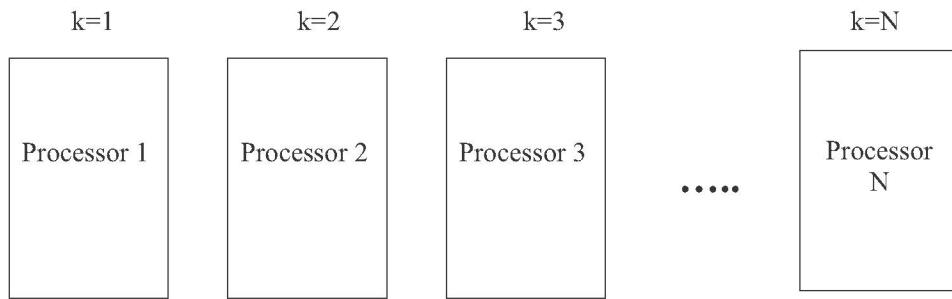
$$f(x) = \frac{du}{dx};$$

$$\alpha f_{i-1} + \beta f_i + \gamma f_{i+1} = \frac{u_j - u_{j-1}}{h}.$$

Разлагая функцию  $f(x)$  и  $u(x)$  в ряд Тейлора, мы можем определить  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ .

Для решения задачи с учетом вышепредложенной модели турбулентности используется схема расщепления по физическим параметрам.

Предлагается следующая физическая интерпретация приведенной схемы расщепления. На первом этапе предполагается, что перенос количества движения осуществляется только за счет конвекции и диффузии. Промежуточное поле скорости находится методом дробных шагов, при использовании метода прогонки. На втором этапе, по найденному промежуточному полю скорости, находится поле давления. Уравнение Пуас-



Для нахождения  $p_{i,j,k}$  решается матричная прогонка и находится  $A_j$ , которая в свою очередь распараллеливается для каждой  $k$ -ой и собирается в главном узле.

После нахождения коэффициентов  $a_{i,j,k}$  значения поля давления находятся из формулы (10). Для вычисления суммы (10) и (11) применяется метод

быстрого преобразования Фурье, который позволяет вычислить данные суммы за  $O(N \ln N)$  действий, что существенно сокращает вычислительное время.

Повышение производительности показано в виде графиков на рис. 1. Разные линии на рис. 1 указывают на размерность подобластей  $N$  вычислительной области.

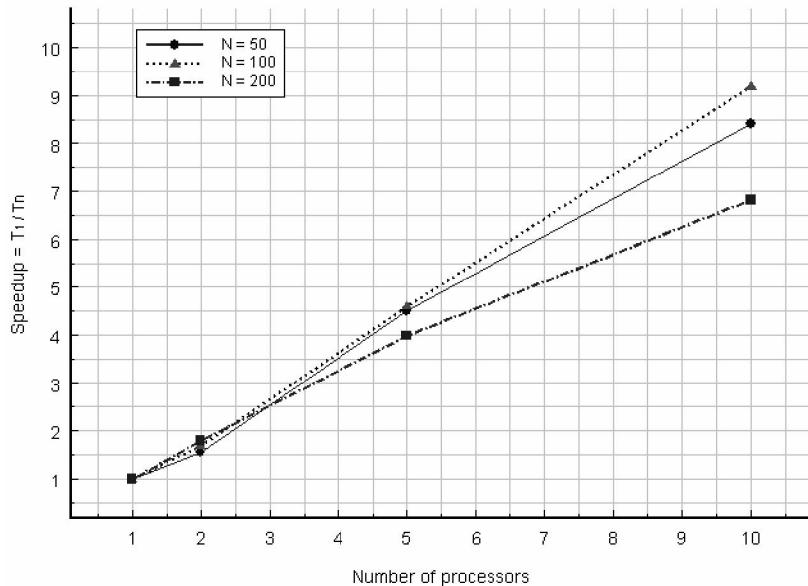


Рис. 1. Расчет ускорения

На рисунках представлены результаты расчетов, полученные на сетке  $100 \times 100 \times 100$ . На рис. 2-4 показаны экспериментальные и вычислительные данные динамических полей струй, ударяющихся о нижнюю область и вызывающих циркуляционное течение у стен. На рис. 5 показана изоповерхность концентрации течения выходного потока воздуха на нижней границе области. На рисунке 6 показан вектор скоростей и концентрация примеси на плоскости  $(x,z)$ . Распространение концентрации в нижней части комнаты показано на рис. 7. На рис. 8 показано распространение концентрации смешанного от диагонали центра на плоскости  $(x,z)$ .

Результаты моделирования переноса примеси в помещение показывают, что перенос примеси и степень его распространения зависит от направления и силы струи, а концентрация примеси распространяется на большую часть помещения. Со временем динамическое поле затухает, а поле концентрации переходит в состояние пассивной примеси и еще долго мигрирует в воздухе.

В заключении отметим, что изложенная математическая модель может быть использована для моделирования нестационарных турбулентных течений несжимаемой жидкости в трехмерных областях.

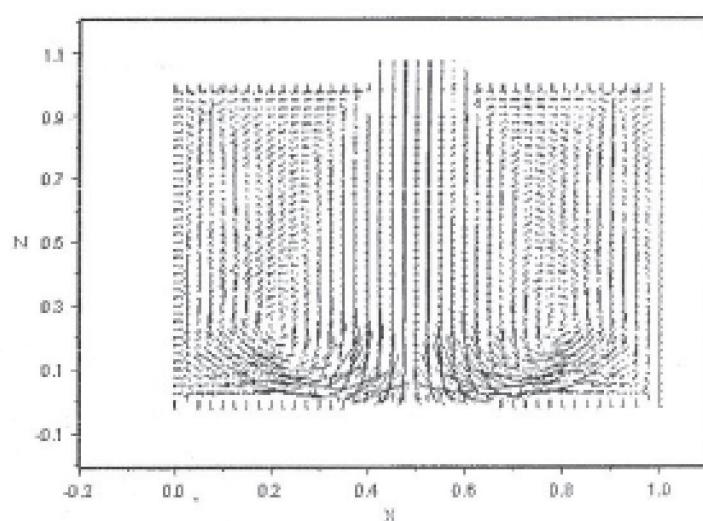
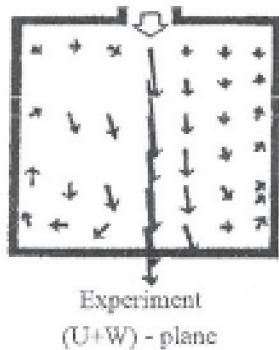


Рис. 2

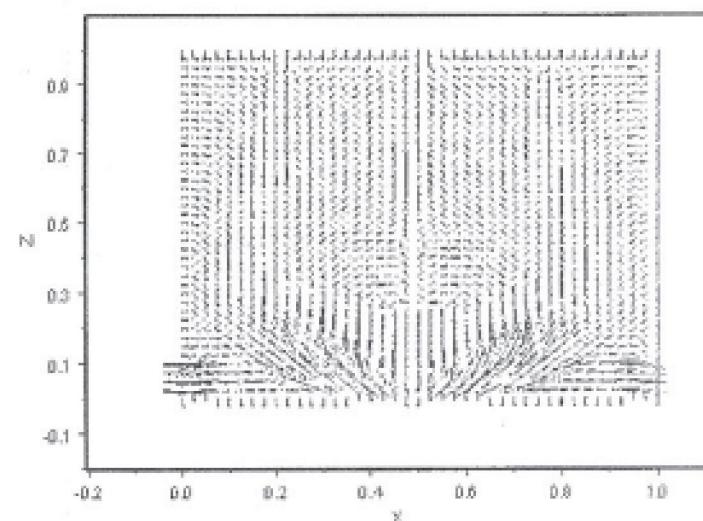
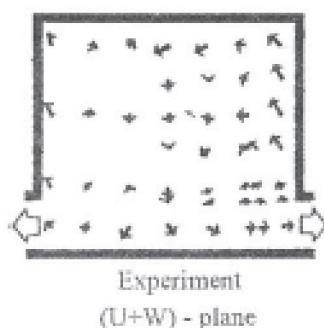


Рис. 3

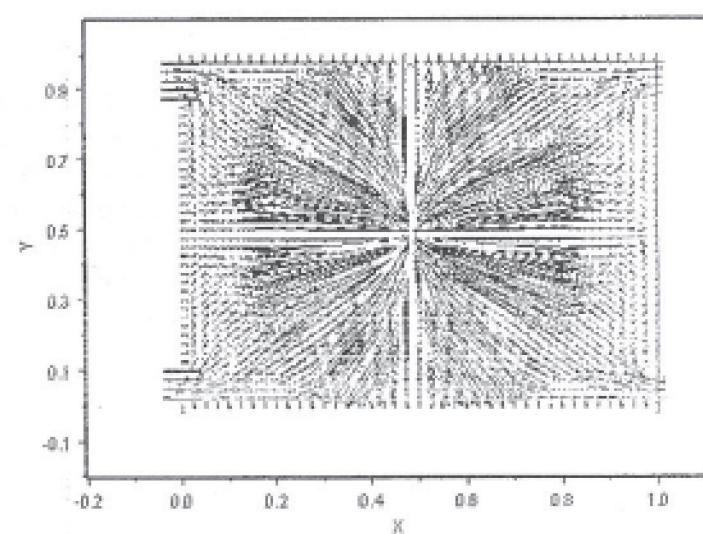
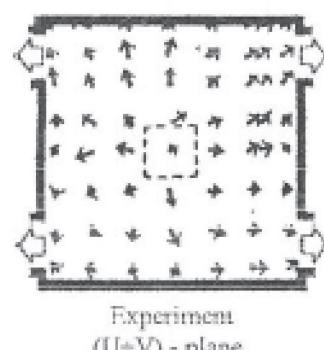


Рис. 4

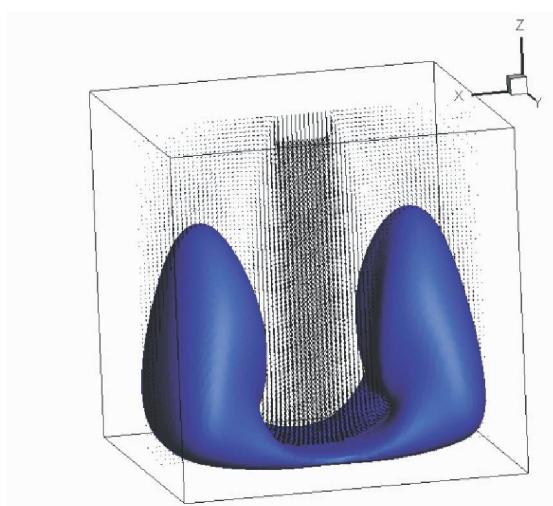


Рис. 5

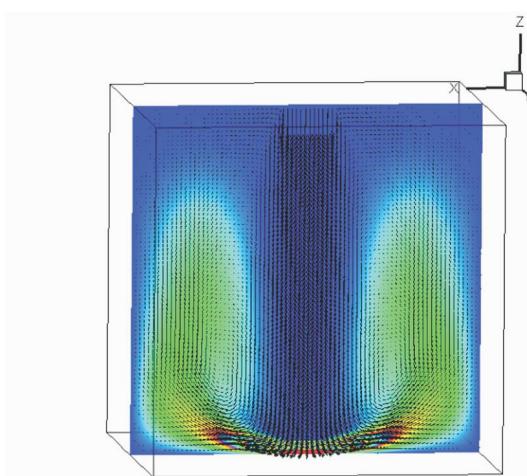


Рис. 6

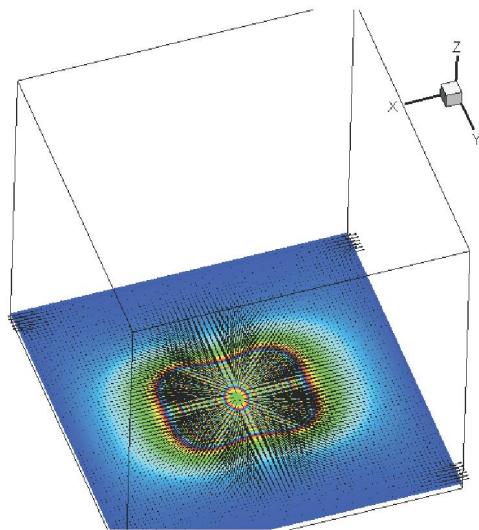


Рис. 7

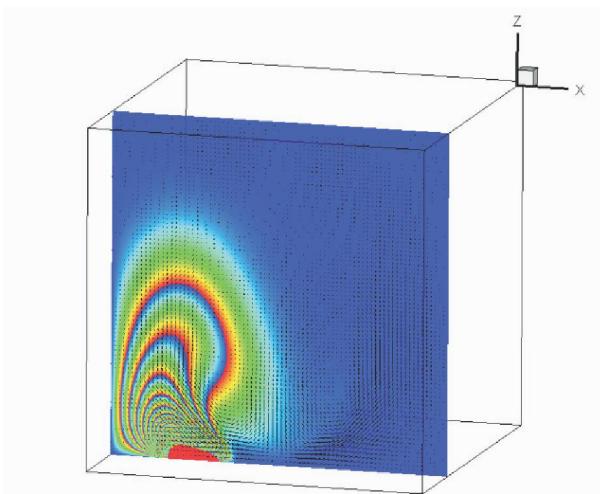


Рис. 8

Таким образом, построенная модель адекватно описывает турбулентные движения нестационарных потоков в трехмерных областях, и может быть использована для решения задач вентиляции в различных помещениях. Также следует отметить, что в рамках настоящей работы построен распараллеленный алгоритм решения трехмерного уравнения Пуассона, который позволяет получить более точный результат. Применены технологии параллельного программирования OpenMP, MPI, что существенно сокращает вычислительное время и повышает эффективность расчетов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М.: Наука, 1989. 432 с.
2. Флемчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей: В 2-х т. Т. 2. М.: Мир, 1991. 552 с.
3. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1972. 612 с.
4. Толстых А.И. Компактные разностные схемы и их применение в задачах аэрогидродинамики. М.: Наука, 1990. 230 с.
5. Пейре Р., Тейлор Т. Вычислительные методы в задачах механики жидкости. Л.: Гидрометеоиздат, 1986. 352 с.
6. Яненко Н.Н. Методы дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Н.: Наука, 1967. 197 с.
7. Антонов А.С. Параллельное программирование с использованием технологий MPI. МГУ, 2004. 71 с.
8. Шпаковский Г.И., Серикова Н.В. Программирование для многопроцессорных систем в стандарте MPI. Минск: БГУ, 2002. 323 с.

**Резюме**

Iрі құйындар әдісі негізінде бөлмедегі ауаны жаңартудың сандық әдісі келтірілген. Физикалық параметрлері бойынша ыдырату схемасын қолдану арқылы сандық алгоритм құрастырылған. Қысымдар өрісіне арналған Пуассон теңдеуі Фурье әдісімен қатар Фурье коэффициенттерін анықтау үшін қолданылатын матрицалық қуалау әдісімен шешіледі. Қойылған есепті шешу үшін күрделі есептеулердің өнімділігін арттыру жағынан қарғанда бүгінгі күнгі ең маңызды және ең тиімді болып саналатын MPI параллельдік бағдарламалау технологиясымен қатар OpenMP директивалары қолданылған. Сандық пішіндеу нәтижелері үш өлшемді графиктер түрінде көрсетілген.

**Summary**

Large eddy simulation method is numerical modeled ventilation of room. A numerical algorithm was developed by using the scheme of splitting by physical parameters. Poisson equation for pressure field is solved by Fourier in conjunction with the method of matrix factorization, which is used to determine the Fourier coefficients. To solve this problem we apply the most up to date and most effective, in terms of improving performance of complex calculations, the technology of parallel programming MPI in conjunction with OpenMP directives. The results of the simulation are presented in the form of three-dimensional graphs.

*КазНУ им. аль-Фараби,  
г. Алматы*

*Поступила 08.10.10г.*