УДК 519.624

Ж. М. КАДИРБАЕВА

ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЛИНЕЙНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМ НАГРУЖЕННЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Институт математики МОН РК, г. Алматы

Предлагается метод исследования линейной нелокальной краевой задачи для систем нагруженных гиперболических уравнений, основанный на разбиении интервалов между точками нагружения с разными шагами и введении дополнительных параметров. В терминах исходных данных установлены достаточные условия однозначной разрешимости рассматриваемой задачи.

На $\overline{\Omega}=[0,\omega]\times[0,T]$ рассматривается нелокальная краевая задача для системы нагруженных гиперболических уравнений

$$u_{xt}=A_0(x,t)u_x+B_0(x,t)u_t+C_0(x,t)u+\sum_{i=1}^{m+1}A_i(x,t)u_x(x,\theta_{i-1})+$$

$$+\sum_{i=1}^{m+1}B_i(x,t)u_t(x,t)\big|_{t=\theta_{i-1}}+\sum_{i=1}^{m+1}C_i(x,t)u(x,\theta_{i-1})+f(x,t), \tag{1}$$

$$u(0,t)=\varphi(t),\ \ t\in[0,T], \tag{2}$$

$$P_2(x)u_x(x,0)+P_1(x)u_t(x,t)\big|_{t=0}+P_0(x)u(x,0)+S_2(x)u_x(x,T)+$$

$$+S_1(x)u_t(x,t)\big|_{t=T}+S_0(x)u(x,T)=\psi(x),\quad x\in[0,\omega], \tag{3}$$

где $(n\times n)$ – матрицы $A_j(x,t)$, $B_j(x,t)$, $C_j(x,t)$, $j=\overline{0,m+1}$, $P_k(x)$, $S_k(x)$, $k=\overline{0,2}$, и n-вектор-функции $f(x,t)$, $\psi(x)$ непрерывны на $\overline{\Omega}$, $[0,\omega]$ соответственно n-вектор-функция $\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0,T]$, $0=\theta_0<\theta_1<\ldots<\theta_m<\theta_{m+1}=T$, $\|u(x,t)\|=\max\limits_{s=\overline{1,n}}|u_s(x,t)|$, $\|A(x,t)\|=\max\limits_{s=\overline{1,n}}\sum\limits_{k=1}^{n}|a_{sk}(x,t)|$.

Краевые задачи для нагруженных гиперболических уравнений начали рассматриваться с 70-х годов прошлого столетия. Обзор и библиография работ содержится в [1, 2]. На основе сведения к интегральным уравнениям Фредгольма получены достаточные условия существования классического решения краевых задач для нагруженных гиперболических уравнений. В случае $A_i=B_i=C_i=0$, $i=\overline{1,m+1}$, т.е. когда в дифференциальных уравнениях отсутствуют члены с нагружениями, задача (1)-(3) рассмотрена в [3]. Методом введения функциональных параметров были установлены коэффициентные достаточные условия существования единственного классического решения нелокальной краевой задачи для системы гиперболических уравнений.

В настоящей работе указанный метод распространяется на нелокальные краевые задачи для систем нагруженных гиперболических уравнений. Отметим, что здесь интервалы между линиями нагружения разбиваются с разными шагами с учетом поведения матрицы $A_0(x,t)$. Пусть $\|A_j(x,t)\|\le\ \le\alpha_j(x,t)$, где $\alpha_j(x,t)$, $j=\overline{0,m+1}$ непрерывны на $\overline{\Omega}$, и $\max\limits_{x\in[0,\omega]}\alpha_0(x,t)=\alpha(t)$. Взяв $\theta_{i-1,0}=\theta_{i-1}$, через k_{i-1} обозначим число разбиений промежутка $[\theta_{i-1},\theta_i)$, $i=1,\ldots,m+1$, при котором имеет место неравенство $\int\limits_{\theta_{i-1,k_{i-1}-1}}^{\theta_i}\alpha(\tau)d\tau\le a$, где a – некоторое наперед заданное

положительное число. Получим разбиение $[0,\omega]\times[0,T)=\bigcup_{r=1}^{p_{m+1}}\Omega_r$, $\Omega_r=[0,\omega]\times[t_{r-1},t_r)$, $r=\overline{1,p_{m+1}}$,

где $p_0=0$, $p_{l+1}=\sum_{s=0}^{l}k_s$, $l=\overline{0,m}$, $t_0=\theta_0=0$, $t_1=\theta_{0,1}$, …, $t_{p_1}=\theta_1$, $t_{p_1+1}=\theta_{1,1}$, …, $t_{p_2}=\theta_2$, …, $t_{p_{m+1}}=T$.

Через $u_r(x,t)$ обозначим сужение функции $u(x,t)$ на Ω_r, $r=\overline{1,p_{m+1}}$. Через $\lambda_r(x)$ обозначим значения функции при $t=t_{r-1}$ и осуществляя замену $\tilde{u}_r(x,t)=u_r(x,t)-\lambda_r(x)$, $(x,t)\in\Omega_r$, $r=\overline{1,p_{m+1}}$, получим эквивалентную многохарактеристическую краевую задачу с функциональными параметрами:

$$\frac{\partial^2\tilde{u}_r}{\partial x\partial t}=A_0(x,t)\frac{\partial\tilde{u}_r}{\partial x}+B_0(x,t)\frac{\partial\tilde{u}_r}{\partial t}+C_0(x,t)\tilde{u}_r+A_0(x,t)\lambda_r'(x)+C_0(x,t)\lambda_r(x)+f(x,t)+$$

$$+\sum_{i=1}^{m+1}\left\{A_i(x,t)\lambda'_{p_{i-1}+1}(x)+B_i(x,t)\frac{\partial\tilde{u}_{p_{i-1}+1}(x,t)}{\partial t}\bigg|_{t=\theta_{i-1}}+C_i(x,t)\lambda_{p_{i-1}+1}(x)\right\},\quad (x,t)\in\Omega_r,\qquad (4)$$

$$\tilde{u}_r(x,t_{r-1})=0,\quad x\in[0,\omega],\quad r=\overline{1,p_{m+1}},\qquad (5)$$

$$\tilde{u}_r(0,t)+\lambda_r(0)=\varphi(t),\ t\in[t_{r-1},t_r),\quad r=\overline{1,p_{m+1}},\qquad (6)$$

$$P_2(x)\lambda_1'(x)+P_0(x)\lambda_1(x)+S_2(x)\lambda'_{p_{m+1}}(x)+S_0(x)\lambda_{p_{m+1}}(x)+P_1(x)\frac{\partial\tilde{u}_1(x,0)}{\partial t}+$$

$$+S_2(x)\lim_{t\to T-0}\frac{\partial\tilde{u}_{p_{m+1}}(x,t)}{\partial x}+S_1(x)\lim_{t\to T-0}\frac{\partial\tilde{u}_{p_{m+1}}(x,t)}{\partial t}+S_0(x)\lim_{t\to T-0}\tilde{u}_{p_{m+1}}(x,t)=\psi(x),\qquad (7)$$

$$\lambda_s'(x)+\lim_{t\to t_s-0}\frac{\partial\tilde{u}_s(x,t)}{\partial x}=\lambda'_{s+1}(x),\quad x\in[0,\omega],\ s=\overline{1,p_{m+1}-1}.\qquad (8)$$

При фиксированных $\lambda_r(x)$, $\lambda_r'(x)$ функции $\{\tilde{u}_r(x,t)\}$, $r=\overline{1,m+1}$ являются решениями задачи Гурса на $\overline{\Omega}_r$ с условиями (5) и

$$\tilde{u}_r(0,t)=\varphi(t)-\varphi(t_{r-1}),\quad t\in[t_{r-1},t_r),\quad r=\overline{1,p_{m+1}}.\qquad (9)$$

Введя новые неизвестные функции $\tilde{v}_r(x,t)=\dfrac{\partial\tilde{u}_r(x,t)}{\partial x}$, $\tilde{w}_r(x,t)=\dfrac{\partial\tilde{u}_r(x,t)}{\partial t}$ из (5), (9) получим $\tilde{v}_r(x,t_{r-1})=0$, $\tilde{w}_r(0,t)=\dot{\varphi}(t)$, и задачу Гурса сведем к системе трех интегральных уравнений

$$\tilde{w}_r(x,t)=\dot{\varphi}(t)+\int_0^x\frac{\partial\tilde{v}_r(\xi,t)}{\partial t}d\xi,\qquad (10)$$

$$\tilde{v}_r(x,t)=\int_{t_{r-1}}^{t}\Big[A_0(x,\tau)\tilde{v}_r(x,\tau)+B_0(x,\tau)\tilde{w}_r(x,\tau)+C_0(x,\tau)\tilde{u}_r(x,\tau)+$$

$$+f(x,\tau)+A_0(x,\tau)\lambda_r'(x)+C_0(x,\tau)\lambda_r(x)+$$

$$+\sum_{i=1}^{m+1}\left\{A_i(x,\tau)\lambda'_{p_{i-1}+1}(x)+B_i(x,\tau)\tilde{w}_{p_{i-1}+1}(x,\theta_{i-1})+C_i(x,\tau)\lambda_{p_{i-1}+1}(x)\right\}\Big]d\tau,\qquad (11)$$

$$\tilde{u}_r(x,t)=\varphi(t)-\varphi(t_{r-1})+\int_0^x\tilde{v}_r(\xi,t)d\xi,\quad (x,t)\in\Omega_r,\ r=\overline{1,p_{m+1}}.\qquad (12)$$

Вместо $\tilde{v}_r(\tau,x)$ подставим соответствующую правую часть (11) и, повторив этот процесс $\nu\ (\nu=1,2,...)$ раз, получим

$$\tilde{v}_r(x,t)=D^0_{\nu,r}(a,x,t)\lambda'_r(x)+E^0_{\nu,r}(a,x,t)\lambda_r(x)+F_{\nu,r}(a,x,t)+G_{\nu,r}(a,x,t,\tilde{v})+$$
$$+J_{\nu,r}(a,x,t,\tilde{u},\tilde{w})+S_{\nu,r}(a,x,t,\tilde{w})+\sum_{i=1}^{m+1}D^i_{\nu,r}(a,x,t)\lambda'_{p_{i-1}+1}(x)+$$
$$+\sum_{i=1}^{m+1}E^i_{\nu,r}(a,x,t)\lambda_{p_{i-1}+1}(x),\quad (x,t)\in\Omega_r,\quad r=\overline{1,p_{m+1}},\tag{13}$$

где

$$D^i_{\nu,r}(a,x,t)=\int_{t_{r-1}}^{t}A_i(x,\tau_1)d\tau_1+...+\int_{t_{r-1}}^{t}A_0(x,\tau_1)...\int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}}A_0(x,\tau_{\nu-1})\int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}}A_i(x,\tau_\nu)d\tau_\nu d\tau_{\nu-1}..d\tau_1,$$

$$E^i_{\nu,r}(a,x,t)=\int_{t_{r-1}}^{t}C_i(x,\tau_1)d\tau_1+...+\int_{t_{r-1}}^{t}A_0(x,\tau_1)...\int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}}A_0(x,\tau_{\nu-1})\int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}}C_i(x,\tau_\nu)d\tau_\nu d\tau_{\nu-1}..d\tau_1,$$

$$F_{\nu,r}(a,x,t)=\int_{t_{r-1}}^{t}f(x,\tau_1)d\tau_1+...+\int_{t_{r-1}}^{t}A_0(x,\tau_1)...\int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}}A_0(x,\tau_{\nu-1})\int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}}f(x,\tau_\nu)d\tau_\nu d\tau_{\nu-1}..d\tau_1,$$

$$G_{\nu,r}(a,x,t,\tilde{v})=\int_{t_{r-1}}^{t}A_0(x,\tau_1)...\int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}}A_0(x,\tau_{\nu-1})\int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}}\tilde{v}_r(x,\tau_\nu)d\tau_\nu d\tau_{\nu-1}..d\tau_1,$$

$$J_{\nu,r}(a,x,t,\tilde{u},\tilde{w})=\int_{t_{r-1}}^{t}[B_0(x,\tau_1)\tilde{w}_r(x,\tau_1)+C_0(x,\tau_1)\tilde{u}_r(x,\tau_1)]d\tau_1+...+$$
$$+\int_{t_{r-1}}^{t}A_0(x,\tau_1)...\int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}}A_0(x,\tau_{\nu-1})\int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}}[B_0(x,\tau_\nu)\tilde{w}_r(x,\tau_\nu)+C_0(x,\tau_\nu)\tilde{u}_r(x,\tau_\nu)]d\tau_\nu d\tau_{\nu-1}..d\tau_1,$$

$$S_{\nu,r}(a,x,t,\tilde{w})=\sum_{i=1}^{m+1}\left[\left\{\int_{t_{r-1}}^{t}B_i(x,\tau_1)d\tau_1+...+\int_{t_{r-1}}^{t}A_0(x,\tau_1)...\int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}}A_0(x,\tau_{\nu-1})\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}}B_i(x,\tau_\nu)d\tau_\nu d\tau_{\nu-1}..d\tau_1\right\}\tilde{w}_{p_{i-1}+1}(x,\theta_{i-1})\right],\ r=\overline{1,p_{m+1}}.$$

Переходя в правой части (13) к пределу при $t\to t_r-0$, находим $\lim\limits_{t\to t_r-0}\tilde{v}_r(x,t)$, $r=\overline{1,p_{m+1}}$, $x\in[0,\omega]$, подставляя их в (7), (8), и умножая обе части (7) на $h=T-t_{p_{m+1}-1}$, получим систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка относительно $\lambda_r(x)$:

$$h\left[P_2(x)\lambda'_1(x)+S_2(x)\left\{\left[D^0_{\nu,p_{m+1}}(a,x,T)+I\right]\lambda'_{p_{m+1}}(x)+\sum_{i=1}^{m+1}D^i_{\nu,p_{m+1}}(a,x,T)\lambda'_{p_{i-1}+1}(x)\right\}\right]=$$
$$=-h\left[P_0(x)\lambda_1(x)+S_2(x)\left\{E^0_{\nu,p_{m+1}}(a,x,T)\lambda_{p_{m+1}}(x)+\sum_{i=1}^{m+1}E^i_{\nu,p_{m+1}}(a,x,T)\lambda_{p_{i-1}+1}(x)\right\}+S_0(x)\times\right.$$
$$\left.\times\lambda_{p_{m+1}}(x)\right]+h\left[\psi(x)-S_2(x)\left\{J_{\nu,p_{m+1}}(a,x,T,\tilde{u},\tilde{w})+S_{\nu,p_{m+1}}(a,x,T,\tilde{w})+F_{\nu,p_{m+1}}(a,x,T)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+G_{\nu,p_{m+1}}(a,x,T,\tilde{v})\right\}-P_1(x)\tilde{w}_1(x,0)-S_1(x)\lim_{t\to T-0}\tilde{w}_{p_{m+1}}(x,t)-S_0(x)\lim_{t\to T-0}\tilde{u}_{p_{m+1}}(x,t)\right],\tag{14}$$

$$\left[I + D^0_{\nu,s}(a,x,t_s)\right]\lambda'_s(x) + \sum_{i=1}^{m+1} D^i_{\nu,s}(a,x,t_s)\lambda'_{p_{i-1}+1}(x) - \lambda'_{s+1}(x) = -E^0_{\nu,s}(a,x,t_s)\lambda_s(x) -$$

$$-\sum_{i=1}^{m+1} E^i_{\nu,s}(a,x,t_s)\lambda_{p_{i-1}+1}(x) - J_{\nu,s}(a,x,t_s,\tilde{u},\tilde{w}) - S_{\nu,s}(a,x,t_s,\tilde{w}) -$$

$$-F_{\nu,s}(a,x,t_s) - G_{\nu,s}(a,x,t_s,\tilde{v}), \quad x \in [0,\omega], \quad s = \overline{1, p_{m+1} - 1}. \tag{15}$$

Запишем систему уравнений (14), (15) в матричном виде

$$Q_\nu(a,x)\lambda'(x) = -E_\nu(a,x)\lambda(x) - F_\nu(a,x) - J_\nu(a,x,\tilde{u},\tilde{w}) - G_\nu(a,x,\tilde{v}), \tag{16}$$

где

$$Q_\nu(a,x): R^{np_{m+1}} \to R^{np_{m+1}},\ E_\nu(a,x): R^{np_{m+1}} \to R^{np_{m+1}},$$

$$F_\nu(a,x) = \left(hS_2(x)F_{\nu,p_{m+1}}(a,x,T) - \hat{t}\,\psi(x), F_{\nu,1}(a,x,t_1),\ldots,F_{\nu,p_{m+1}-1}(a,x,t_{p_{m+1}-1})\right),$$

$$J_\nu(a,x,\tilde{u},\tilde{w}) = \left(h\left\{P_1(x)\tilde{w}_1(x,0) + S_1(x)\lim_{t\to T-0}\tilde{w}_{p_{m+1}}(x,t) + S_0(x)\lim_{t\to T-0}\tilde{u}_{p_{m+1}}(x,t)\right\} +\right.$$

$$+ hS_2(x)[J_{\nu,p_{m+1}}(a,x,T,\tilde{u},\tilde{w}) + S_{\nu,p_{m+1}}(a,x,T,\tilde{w})], J_{\nu,1}(a,x,t_1,\tilde{u},\tilde{w}) + S_{\nu,1}(a,x,t_1,\tilde{w}),\ldots,$$

$$\left. J_{\nu,p_{m+1}-1}(a,x,t_{p_{m+1}-1},\tilde{u},\tilde{w}) + S_{\nu,p_{m+1}-1}(a,x,t_{p_{m+1}-1},\tilde{w})\right),$$

$$G_\nu(a,x,\tilde{v}) = \left(hS_2(x)G_{\nu,p_{m+1}}(a,x,T,\tilde{v}), G_{\nu,1}(a,x,t_1,\tilde{v}),\ldots,G_{\nu,p_{m+1}-1}(a,x,t_{p_{m+1}-1},\tilde{v})\right).$$

Для нахождения решения задачи (4)-(8) предлагается итерационный процесс, аналогично алгоритму [4] учитывающий специфику задачи (1)-(3).

Следующее утверждение устанавливает коэффициентные достаточные условия однозначной разрешимости задачи (1)-(3).

Теорема. *Пусть при некоторых* $a > 0$, $\nu \in N$, *матрица* $Q_\nu(a,x)$ *обратима при всех* $x \in [0,\omega]$ *и выполняются неравенства:*

a) $\left\|[Q_\nu(a,x)]^{-1}\right\| \le \gamma_\nu(a,x)$,

b) $\zeta_\nu(a,x) = \gamma_\nu(a,x)\max[(T - t_{p_{m+1}-1})\|S_2(x)\|, 1]\times$

$$\times\left\{e^a - \sum_{l=0}^{\nu}\frac{a^l}{l!} + \max_{r=\overline{1,p_{m+1}}}\int_{t_{r-1}}^{t_r}\sum_{i=1}^{m+1}\alpha_i(x,\tau)d\tau\left[e^a - \sum_{l=0}^{\nu-1}\frac{a^l}{l!}\right]\right\} \le \chi < 1,$$

где $\gamma_\nu(a,x)$ *- положительная, непрерывная по* $x \in [0,\omega]$ *функция,* $\chi - const$.

Тогда нелокальная краевая задача для системы нагруженных гиперболических уравнений (1)-(3) имеет единственное решение.

ЛИТЕРАТУРА

1 Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. – М.: Наука, 2006. – 287 с.

2 Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И. Нагруженные уравнения как возмущения дифференциальных уравнений. – Алматы: Ғылым, 2010. – 334 с.

3 Асанова А.Т., Джумабаев Д.С. Однозначная разрешимость нелокальной краевой задачи для систем гиперболических уравнений // Дифференциальные уравнения. – 2003. – Т. 39, № 10. – С. 1343-1354.

4 Джумабаев Д.С., Кадирбаева Ж.М. Об одном приближенном методе нахождения решения полупериодической краевой задачи для систем нагруженных гиперболических уравнений // Вестник КазНУ им. аль-Фараби. Серия математика, механика, информатика. – 2010. – № 1. – С. 105-112.

Ж. М. Қадырбаева

ЖҮКТЕЛГЕН ГИПЕРБОЛАЛЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ЖҮЙЕСІ ҮШІН
СЫЗЫҚТЫ БЕЙЛОКАЛ ШЕТТІК ЕСЕБІНІҢ БІРМӘНДІ ШЕШІЛІМДІЛІГІ ТУРАЛЫ

Жүктеу нүктелері арасындағы аралықтарды әртүрлі қадамдармен бөлу және қосымша параметрлерді енгізу негізінде жүктелген гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін сызықты бейлокал шеттік есепті зерттеу әдісі ұсынылған. Бастапқы берілімдер терминдерінде қарастырылып отырған есептің бірмәнді шешілімділігінің жеткілікті шарттары тағайындалған.

Zh. M. Kadirbayeva

ON AN UNIQUE SOLVABILITY OF LINEAR NON-LOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEM
FOR THE SYSTEM OF LOADED HYPERBOLIC EQUATIONS

The method of investigation of linear non-local boundary value problem for the system of loaded hyperbolic equations is supposed, based on division of intervals between loaded points with difference steps and introducing additional parameters. Sufficient conditions of unique solvability of considering problem are established in the terms of initial data.