УДК 517.956

Т. Ш. КАЛЬМЕНОВ, Е. А. НЫСАНОВ, Г. М. ХУШНИЗАРОВ

(Институт математики и математического моделирования, МОН РК, Алматы, Республика Казахстан)

ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА

Аннотация. В статье получены граничные условия гидродинамического потенциала для системы Стокса. Также доказано, что система Стокса с полученными граничными условиями имеет единственное решение, которое построено в явном виде.

Ключевые слова: гидродинамический потенциал, система Стокса, фундаментальное решение, потенциал простого слоя, потенциал двойного слоя.

Тірек сөздер: гидродинамикалық потенциал, Стокс жүйесі, іргелі шешім, жай қабатты потенциал, қос қабатты потенциал.

Keywords: hydrodynamic potential, Stokes system, fundamental solution, single layer potential, double layer potential.

1. Введение. Ввиду большой теоретической и прикладной важности, граничные условия для гидродинамического потенциала представляют большой научный интерес. Отметим, что в данной работе получены граничные условия гидродинамического потенциала для системы Стокса и продолжены исследования на основе полученных ранее результатов работ, а именно: работа [1], в

которой для произвольной области определено граничное условие объемного потенциала, и в случае двумерного круга и трехмерного шара найдены собственные значения и собственные функции объемного потенциала; в работе [2] в ограниченной односвязной области получены граничные условия объемного потенциала для полигармонического уравнения; в работе [3] с помощью объемного потенциала разработана нелокальная начально-краевая задача для уравнения теплопроводности высокого порядка в ограниченной области. При этом было найдено единственное классическое решение этой задачи в явном виде и показано, что решение начально-краевой задачи приравнивается решению задачи Коши в бесконечном пространстве.

2. Предварительные обозначения и понятия. Система Стокса – модель для описания медленного стационарного течения вязкой жидкости. В качестве величин, характеризующих движение вязкой жидкости, используют вектор скорости $\mathbf{v}(x,t)=(\vartheta_1(x,t),\vartheta_2(x,t),\vartheta_3(x,t))$ и тензор напряжений $\sigma_{ij}(x,t)$ $(i,j=1,2,3)$. Здесь $x\in\mathbf{R}^3$ и x_1,x_2,x_3 – координаты точки, в которой приложены вектор ϑ тензор σ_{ij} [4, 5].

Закон сохранения массы для несжимаемой жидкости выражается уравнением неразрывности

$$\operatorname{div}\mathbf{v}=0.$$

Закон сохранения количества движения имеет вид

$$\rho\frac{d\vartheta_i}{dt}=\sum_{j=1}^{3}\frac{d\sigma_{ij}}{dx_j}+\mathbf{f}_i;\quad i=1,2,3.$$

Здесь ρ - плотность жидкости, $\mathbf{f}_i$ - компоненты объемных сил, действующих на жидкость, а d/dt - полная производная, равная $d/dt+\mathbf{v}\cdot\nabla$. Как и в случае деформируемого твердого тела, тензор напряжений симметричен

$$\sigma_{ij}=\sigma_{ji};\quad i,j=1,2,3.$$

Согласно закону Стокса уравнение состояния вязкой жидкости связывает тензор напряжений с давлением p и тензором скоростей деформации $(\partial\vartheta_i/\partial x_j+\partial\vartheta_j/\partial x_i)/2$ по формуле

$$\sigma_{ij}=-p\delta_i^j+\rho\nu\left(\frac{\partial\vartheta_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\vartheta_j}{\partial x_i}\right);\quad i,j=1,2,3,$$

где ν - коэффициент кинематической вязкости.

В результате подстановки последнего выражения в закон сохранения количества движения и учета уравнения неразрывности получаются уравнения Навье-Стокса

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}=-\rho^{-1}\nabla p+\nu\Delta\mathbf{v}+\mathbf{f}.$$

В случае стационарного течения жидкости первый член левой части пропадает. Для медленного течения (когда число Рейнольдса Re << 1) допустима линеаризация уравнений Навье-Стокса, то есть пренебрежение нелинейным членом ввиду его малости по сравнению с остальными. Таким образом, для описания медленного стационарного течения вязкой жидкости мы приходим к системе Стокса

$$\begin{cases}\nu\Delta\mathbf{v}-\rho^{-1}\nabla p+\mathbf{f}=0,\\ \operatorname{div}\mathbf{v}=0.\end{cases}$$

Без ограничения общности можно считать, что ρ = 1.

Для отыскания четырех неизвестных $\vartheta_1,\vartheta_2,\vartheta_3$ и p эта система содержит четыре уравнения. Давление p может быть определено из нее с точностью до произвольного постоянного слагаемого, что далее особо оговариваться не будет.

С подробным изложением приведенных ниже результатов, восходящих к Лихтенштейну [6] и Одквисту [7], можно познакомиться по книге О. А. Ладыженской [8]. Конкретные вопросы, связанные с практическим применением граничных интегральных уравнений при решении краевых задач для системы Стокса, рассмотрены в книге С. М. Белоносова и К. Е. Черноуса [9], где приведена и библиография.

Определение 1. *Составленная из векторов скорости квадратная матрица* $U(x,\xi)=[u_i^j(x,\xi)]$ *и соответствующий ей вектор давления* $\mathbf{Q}(x,\xi)=(q^1(x,\xi),q^2(x,\xi),q^3(x,\xi),)$ *называются фундаментальным решением системы Стокса, если они удовлетворяют соотношениям*

$$\nu\Delta_x\mathbf{u}^j-\nabla_x q^j=\delta(x-\xi)\mathbf{e}^j,$$
$$\operatorname{div}\mathbf{u}^j=0.$$

Здесь $\mathbf{e}^j$ - единичный вектор, направленный вдоль j-й оси декартовой системы координат, а $\delta(x-\xi)$ - мера Дирака, сосредоточенная в точке ξ.

Фундаментальное решение, компоненты которого стремятся к нулю при $|x|\to\infty$, определяются формулами

$$u_i^j=-\frac{1}{8\pi\nu}\left[\frac{\delta_i^j}{r}+\frac{(x_i-\xi_i)(x_j-\xi_j)}{r^3}\right],$$
$$q^j=-\frac{x_j-\xi_j}{4\pi r^3},\quad i,j=1,2,3, \tag{1}$$

где δ_i^j - символ Кронекера.

Отметим, что выражение в квадратных скобках в (1) получается из аналогичного выражения в тензоре Кельвина-Сомильяна, если в последнем положить $(\lambda+3\mu)/(\lambda+\mu)=1$.

Пусть Ω^+ - односвязная ограниченная область в $\mathbf{R}^3$. Будем считать, что граница S области Ω^+ - принадлежит классу $C^{1,\alpha}$, $0<1<\alpha$. Через Ω^- обозначим $\mathbf{R}^3\setminus\overline{\Omega}^+$. Введем матричные операторы $\mathbf{P}(\partial/\partial x,\mathbf{n}_x)$ и $\mathbf{P}'(\partial/\partial x,\mathbf{n}_x)$, действующие на пары (ϑ,p) по правилу

$$\mathbf{P}(\partial/\partial x,\mathbf{n}_x)\mathbf{v}=-p\mathbf{n}_x+\nu(2\partial\vartheta/\partial\mathbf{n}_x+\mathbf{n}_x\times\operatorname{rot}\mathbf{v});$$
$$\mathbf{P}'(\partial/\partial x,\mathbf{n}_x)\mathbf{v}=p\mathbf{n}_x+\nu(2\partial\mathbf{v}/\partial\mathbf{n}_x+\mathbf{n}_x\times\operatorname{rot}\mathbf{v}).$$

Для решения $(\mathbf{v}^\pm,p^\pm)$ системы Стокса в области $\Omega^\pm$ справедливо представление.

$$\mathbf{v}^\pm(x)=\pm\int_S\{[\mathbf{P}'(\partial/\partial\xi,\mathbf{n}_\xi)U(x,\xi)]\mathbf{v}^\pm(\xi)-U(x,\xi)\mathbf{P}(\partial/\partial\xi,\mathbf{n}_\xi)\mathbf{v}^\pm\}d_\xi S,$$
$$p^\pm(x)=\mp\int_S[\mathbf{Q}(x,\xi)\mathbf{P}(\partial/\partial\xi,\mathbf{v}_\xi)U(x,\xi)]\mathbf{v}^\pm-2\nu\mathbf{v}^\pm(\xi)\partial\mathbf{Q}/\partial\mathbf{n}_\xi]d_\xi S. \tag{2}$$

Формулы (2) в Ω^- имеют место в предложении, что при $|x|\to\infty$

$$\left|\mathbf{v}^-(x)\right|=O(|x|^{-1}),$$
$$\left|\nabla\vartheta_k(x)\right|,\quad p(x)=O(|x|^{-2}),\quad k=1,2,3. \tag{3}$$

Определение 2. *Гидродинамическими потенциалами называются пары* $(V,W)\rho$ *и* $(V,W)\chi$, *компоненты которых представляют собой зависящие от параметра* $x\in\mathbf{R}^3\setminus S$ *интегралы. Потенциал простого слоя определяется следующим образом:*

$$(V\rho)(x)=\int_S U(x,\xi)\rho(\xi)d_\xi S,$$
$$(\vartheta\rho)(x)=\int_S\mathbf{Q}(x,\xi)\rho(\xi)d_\xi S.$$

Потенциал двойного слоя имеет вид

$$(W\chi)(x)=\int_S[\mathbf{P}'(\partial/\partial\xi,\mathbf{n}_\xi)U(x,\xi)]\chi(\xi)d_\xi S,$$
$$(\omega\chi)(x)=2\nu\int_S\chi(\xi)(\partial\mathbf{Q}/\partial\mathbf{n}_\xi)(x,\xi)d_\xi S.$$

Будем предполагать, что компоненты плотностей ρ_k и χ_k $(k=1,2,3)$ - непрерывные функции.

Потенциалы $(V,W)\rho$ и $(V,W)\chi$ удовлетворяют однородную систему Стокса в $\Omega^{\pm}$. Кроме того, при $|x|\to\infty$ справедливы оценки

$$(V\rho)(x)=O(|x|^{-1});$$
$$(\mathcal{G}\rho)(x),\quad (W\chi)(x),\quad (\mathcal{O}\chi)(x)=O(|x|^{-2}). \tag{4}$$

3. Основные результаты. Рассмотрим следующие гидродинамические потенциалы:

$$\mathbf{u}(x)=\int_{\Omega}E(x,y)\mathbf{f}(y)dy, \tag{5}$$

$$p(x)=\int_{\Omega}Q(x,y)\mathbf{f}(y)dy \tag{6}$$

где $E(x,y)$ является фундаментальным тензором скорости и $Q(x,y)$ является его присоединенным вектором давления.

Гидродинамические потенциалы удовлетворяют:

$$-\mu\Delta\mathbf{u}+\nabla p=\mathbf{f},\quad \operatorname{div}\mathbf{u}=0 \text{ из } \Omega \tag{7}$$

Основным результатом данной работы является:

Теорема. *Для любой функции* $\mathbf{f}\in L_2(\Omega)$ *гидродинамические потенциалы* (5)-(6) *удовлетворяют граничному условию*

$$-\frac{\mathbf{u}(x)}{2}+\int_{\partial\Omega}\mathbf{P}(E(x,y))\mathbf{u}(y)dS_y-\int_{\partial\Omega}E(x,y)\mathbf{P}'(\mathbf{u})dS_y=0,\quad x\in\partial\Omega. \tag{8}$$

И наоборот, если функции $\mathbf{u}\in W_2^2(\Omega)$ *и* $p\in W_2^1(\Omega)$ *удовлетворяют системе Стокса (7) и граничному условию (8), то они определяют гидродинамические потенциалы (5) и (6).*

Доказательство. Во-первых, мы предполагаем, что $\mathbf{u}\in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$. Непосредственный подсчет показывает, что для любого $x\in\Omega$, у нас есть

$$\mathbf{u}(x)=\int_{\Omega}E(x,y)\mathbf{f}(y)dy=\int_{\Omega}E(x,y)(-\mu\Delta\mathbf{u}+\nabla p)dy=$$
$$=\int_{\Omega}(-\mu\Delta E(x,y)-\nabla Q(x,y))\mathbf{u}dy+\int_{\partial\Omega}(\mathbf{P}(E(x,y))\mathbf{u}(y)-E(x,y)\mathbf{P}'(\mathbf{u}))dS_y$$

где

$$\mathbf{P}(E(x,y)):=-\rho\mathbf{n}+\mu(\nabla\mathbf{u}+\nabla\mathbf{u}^{\mathrm{T}})\mathbf{n},$$
$$\mathbf{P}'(\mathbf{u}):=\rho\mathbf{n}+\mu(\nabla\mathbf{u}+\nabla\mathbf{u}^{\mathrm{T}})\mathbf{n}.$$

Это означает, что

$$\int_{\partial\Omega}\mathbf{P}(E(x,y))\mathbf{u}(y)dS_y-\int_{\partial\Omega}E(x,y)\mathbf{P}'(\mathbf{u})dS_y=0. \tag{9}$$

Применение свойств соответствующего двойного и простого слоя гидродинамических потенциалов к (9) с $x\to\partial\Omega$, получаем

$$-\frac{\mathbf{u}(x)}{2}+\int_{\partial\Omega}\mathbf{P}(E(x,y))\mathbf{u}(y)dS_y-\int_{\partial\Omega}E(x,y)\mathbf{P}'(\mathbf{u})dS_y=0,\quad x\in\partial\Omega. \tag{10}$$

Далее легко показать, что, переходя к пределу, отношение (10) остается в силе для всех $\mathbf{u}\in W_2^2(\Omega)$ и $p\in W_2^1(\Omega)$. Таким образом, гидродинамические потенциалы (5)-(6) удовлетворяют граничному условию (10).

И наоборот, если функции $\mathbf{u}\in W_2^2(\Omega)$ и $p\in W_2^1(\Omega)$ удовлетворяют системе Стокса (7) и граничному условию (8), то они совпадают с гидродинамическими потенциалами (5)-(6). В случае если (8) не удовлетворяет (7), то функции $\mathbf{v}=\mathbf{u}-\mathbf{u}_1\in W_2^2(\Omega)$, и $\rho=p-p_1\in W_2^1(\Omega)$, где $\mathbf{v}$ и ρ являются гидродинамическими потенциалами, удовлетворяют однородной системе Стокса

$$-\mu\Delta\mathbf{v}+\nabla\rho=0,\quad \mathrm{div}\mathbf{v}=0 \text{ из } \Omega \tag{11}$$

и граничному условию (8), т.е.

$$-\frac{\mathbf{v}(x)}{2}+\int_{\partial\Omega}\mathbf{P}(E(x,y))\mathbf{v}(y)dS_y-\int_{\partial\Omega}E(x,y)\mathbf{P}'(\mathbf{v})dS_y=0,\quad x\in\partial\Omega. \tag{12}$$

Теперь, применяя формулу Грина для $\mathbf{v}\in W_2^2(\Omega)$, и $\rho\in W_2^1(\Omega)$, мы замечаем, что

$$0=\int_{\Omega}E(x,y)\mathbf{0}dy=\int_{\Omega}E(x,y)(-\mu\Delta\mathbf{v}+\nabla\rho)dy=$$

$$=\int_{\Omega}(-\mu\Delta E(x,y)-\nabla Q(x,y))\mathbf{v}dy+\int_{\partial\Omega}(\mathbf{P}(E(x,y))\mathbf{v}(y)-E(x,y)\mathbf{P}'(\mathbf{v}))dS_y$$

где

$$\mathbf{P}(E(x,y)):=-\rho\mathbf{n}+\mu(\nabla\mathbf{u}+\nabla\mathbf{u}^{\mathrm{T}})\mathbf{n},$$

$$\mathbf{P}'(\mathbf{u}):=\rho\mathbf{n}+\mu(\nabla\mathbf{u}+\nabla\mathbf{u}^{\mathrm{T}})\mathbf{n}.$$

То есть

$$\mathbf{v}(x)+\int_{\partial\Omega}\mathbf{P}(E(x,y))\mathbf{v}(y)dS_y-\int_{\partial\Omega}E(x,y)\mathbf{P}'(\mathbf{v})dS_y=0.$$

Переходя к пределу при $\Omega\ni x\to\partial\Omega$, мы получим:

$$\mathbf{v}(x)-\frac{\mathbf{v}(x)}{2}+\int_{\partial\Omega}\mathbf{P}(E(x,y))\mathbf{v}(y)dS_y-\int_{\partial\Omega}E(x,y)\mathbf{P}'(\mathbf{v})dS_y=0,\quad x\in\partial\Omega. \tag{13}$$

По сравнению с (12), мы получаем следующее граничное условие

$$\mathbf{v}(x)\big|_{\partial\Omega}=0.$$

В силу единственности решения задачи Дирихле для системы Стокса [8], у нас есть $\mathbf{v}(x)=\mathbf{u}(x)-\mathbf{u}_1(x)\equiv 0$ для любого $x\in\Omega$ и $\rho(x)=p(x)-p_1(x)\equiv 0$ при $x\in\Omega$, т.е.

$$\mathbf{u}(x)\equiv\mathbf{u}_1(x),\quad x\in\Omega,$$

$$p(x)\equiv p_1(x),\quad x\in\Omega,$$

где $\mathbf{u}_1(x)$ и $p_1(x)$ совпадают с гидродинамическими потенциалами. На этом завершается доказательство теоремы.

Замечания. Очевидно, что решение краевой задачи (7)-(8) совпадает в данной области Ω с физическим решением системы Стокса, полученным на всей пространстве, т.е. краевая условия (8) является прозрачным граничным условиям система Стокса.

4. Заключение. Отметим, что граничное условие, выше изложенное в теореме для гидродинамического потенциала, впервые получено в явным виде.

ЛИТЕРАТУРА

1 Кальменов Т.Ш., Сураган Д. К спектральным вопросом объемного потенциала // Доклады РАН. – 2009. – Т. 428, №1. – С. 16-19.

2 Кальменов Т.Ш., Сураган Д. Граничные условия объемного потенциала для полигармонического уравнения // Дифференциальные уравнения. – 2012. – Т. 48, № 4. – С. 595-599.

3 Suragan D., Tokmagambetov N. On transparent boundary conditions for the high-order heat equation // Сиб. электрон. матем. изв. – 2013. – Т. 10. – С. 141-149.

4 Hsiao G.C., Wendland W.L. Boundary Integral Equations. – Heidelberg, 2008.

5 Мазья В.Г. Граничные интегральные уравнения. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики // Фундаментальные направления. – 1988. – Т. 27. – С. 131-230.

6 Lichtenstein L. Uber einige Existenzprobleme der Hydrodynamik // Math. Z. – 1928. – 28. – 387-415.

7 Odqvist F.K.G. Uber die Randwertaufgaben der Hydrodynamik zaher Flussigkeiten // Math. Z. – 1930. – 32. – 329-375.

8 Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. – М.: Наука, 1970. – 766 с.

9 Белоносов С.М., Черноус К.А. Краевые задачи для уравнений Навье-Стокса. – М.: Наука, 1985. – 311 с.

REFERENCES

1 Kal'menov T.Sh., Suragan D. K spectral'nym voprosam ob'emnogo potentsiala. Doklady RAN. 2009. T. 428, N 1. 16-19.

2 Kal'menov T.Sh., Suragan D. Granichnye uslovia obemnogo potensiala dlia poligarmonicheskogo uravnenia // Differensisl'nye uravnenia. 2012. T. 48, N 4. S. 595-599.

3 Suragan D., Tokmagambetov N. On transparent boundary conditions for the high-order heat equation. Sib. elektron. matem. izb. 2013. T. 10. S. 141-149.

4 Hsiao G.C., Wendland W.L. Boundary Integral Equations. Heidelberg, 2008.

5 Maz'ia V.G. Granichnye integral'nye uravneniia. Itogi nauki I tekhniki. Sovremennye problemy matematiki. Fundamental'nye napravleniia. 1988. T. 27. 131-230.

6 Lichtenstein L. Uber einige Existenzprobleme der Hydrodynamik. Math. Z. 1928. 28. 387-415.

7 Odqvist F.K.G. Uber die Randwertaufgaben der Hydrodynamik zaher Flussigkeiten. Math. Z. 1930. 32. 329-375.

8 Ladyzhenskaya O.A. Matematicheskie voprosy dinamiki viazkoi neszhimaemoi zhidkosti. M.: Nauka, 1970. 766 s.

9 Belonosov S.M., Chernous K.A. Kraevye zadachi dlia uravnenii Nav'e-Stoksa. M.: Nauka, 1985. 311 s.

Резюме

Т. Ш. Кәлменов, Е. А. Нысанов, Г. М. Хүшнизаров

(ҚР БҒМ Математика және математикалық үлгілеу институты, Алматы, Қазақстан Республикасы)

ГИДРОДИНАМИКАЛЫҚ ПОТЕНЦИАЛ ҮШІН ШЕКАРАЛЫҚ ШАРТ

Мақалада Стокс жүйесі үшін гидродинамикалық потенциалдың шекалалық шарты алынған. Сонымен катар, Стокс жүйесі табылған шекаралық шартпен айқын түрде құрылған жалғыз шешімге ие болатыны дәлелденді.

Тірек сөздер: гидродинамикалық потенциал, Стокс жүйесі, іргелі шешім, жай қабатты потенциал, қос қабатты потенциал.

Summary

T. Sh. Kal'menov, E. A. Nysanov, G. M. Khushnizarov

(Institute of mathematics and mathematical modeling MES RK, Almaty, Republic of Kazakhstan)

BOUNDARY CONDITIONS OF HYDRODYNAMIC POTENTIAL

In this paper, the hydrodynamic boundary conditions for the Stokes system capacity. Also proved that the Stokes system with the obtained boundary conditions has a unique solution, which is constructed explicitly.

Keywords: hydrodynamic potential, Stokes system, fundamental solution, single layer potential, double layer potential.

Поступила 15.01.2014г.