Т.Ш. КАЛЬМЕНОВ

АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ И РАЗРЕШИМОСТЬ В ЦЕЛОМ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ПРОБЛЕМЫ НАВЬЕ-СТОКСА

В области $D=\{\Omega\times(0,T),\Omega=(0<x_i<2\pi)\}$ рассмотрим следующую задачу:

Задача N-S. Найти в области D регулярное решение системы

$$Lu_i=\frac{\partial u_i}{\partial t}-\nu\Delta u_i+\sum_{j=1}^{n}u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_i}-\frac{\partial p}{\partial x_i}=f_i, \qquad (1)$$

периодической по переменным x_i

$$u(x+2\pi,t)=u(x,t)\ , \qquad (2)$$

удовлетворимее начальному условию

$$u_i\big|_{t=0}=0\ , \qquad (3)$$

и условию несжимаемости

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u_j}{\partial x_j}=0\ ,\ \int_0^{2\pi}p(x_1,t)dx_1=0. \qquad (4)$$

Основным результатом настающей работы является

Теорема.

Для любой $f_i\in L_2(D)$, $i=1,2,...,n$ существует единственная решения система

$u_i\in W_2^2(D)$, $P\in W_2^1(D)\cap L_2(0\times T)$ удовлетворяющее условиям Навье-Стокса (2)-(4) и априорной оценке

$$\sum_{i=1}^{n}\|u_i\|^2_{W_2^2(D)}+\int_0^t\|P\|_{W_2^1(D)\cap L_2(0,T)}dt\le C\sum_{i=1}^{n}\|f_i\|^2_{L_2(D)}\ .(5)$$

<u>Краткий ход доказательства.</u>

Пусть $u_i\in W_2^3(D)$ и $P\in W_2^1(\Omega)$ тогда из система (1) с учетом условий несжимаемости (4) получим

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}Lu_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\sum_{j=1}^{n}u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-\Delta p=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\ , \qquad (6)$$

Обозначив через

$$\upsilon_i(x.t)=\sum_{j=1}^{n}u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\ , \qquad (7)$$

из соотношения (6) имеем

$$-\Delta p=-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial v_j}{\partial x_j}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_j}{\partial x_j},$$

$$p(x+2\pi,t)=p(x,t). \qquad (8)$$

Отсюда в силу выполнения условия разрешимости задачи (8) получаем

$$P(x,t)=p_0(t)+\int_\Omega G_0(x,\xi)\left(-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial v_j}{\partial\xi_j}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_j}{\partial\xi_j}\right)d\xi\ ,(9)$$

где $G(x,\xi)-$ функция Грина задачи (10)

$$-\Delta G=\delta(x-\xi), \qquad G(x+2\pi)=G(x).$$

а $p_0(t)\in L_2(0\times T)$ произвольная функция.

Отметим что

$$G(x,\xi)=\sum_{m^2=1}^{\infty}\frac{e^{i(m,x-\xi)}}{m^2}, \qquad (11)$$

$$m=(m_1,m_2,m_3...m_n),$$

$$m^2=m_1^{\ 2}+m_2^2...+m_n^2.$$

Подставив правую часть равенства (9) в уравнение (1)относительно неизвестных v_i получим систему интегральных уравнений

$$v_i-\sum_{j=1}^{n}\int_\Omega\frac{\partial^2G}{\partial x_i\partial\xi_j}v_j(\xi,t)d\xi=$$

$$=f_i-\sum_{j=1}^{n}\int_\Omega\frac{\partial^2G}{\partial x_i\partial\xi_j}f_j(\xi,t)d\xi-\frac{\partial u_i}{\partial t}+\nu\Delta u_i=g_i(x,t),(12)$$

$$i=1,2...n$$

Пользуясь разложениями

$$u_i(x,t)=\sum_{m^2=0}^{\infty}e^{i(m,x)}u_{im,j}(t),$$

$$g_i(\xi,t)=\sum_{m^2=0}^{\infty}e^{i(m,x)}g_{im,j}(t),\quad i=1,2...n \qquad (13)$$

и представлением функции Грина $G(x,\xi)-$т.е формулой (11) можно доказать

Лемму 1. Однородные системы уравнения

$$v_i-\sum_{j=1}^{n}\int_\Omega\frac{\partial^2G}{\partial x_i\partial\xi_j}v_j(\xi,t)d\xi=0,\ \ i=1,2...n \qquad (14)$$

Имеет нетривиальное решение v_i^0 – представимой только формулой

$$v_i^0(x,t)=\frac{\partial v(x,t)}{\partial x_i}, \qquad (15)$$

где $v(x,t)$ – скалярная функция .

Из условий несжимаемости (4) и соотношения (12) и в силу симметричности ядер $\frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial \xi_j}$ легко проверить что

$$\sum_{i=1}^{n}(g_i, v_i^0)=0, \; i=1,2...n. \qquad (16)$$

Поэтому общее решение систем уравнений (12) определяется формулой

$$v_i(x,t)=(E-G)^{-1}g_i+\tilde{v}_i=$$

$$=(E-G)^{-1}g_i+\frac{\partial v}{\partial x_i}=\tilde{v}_i+\frac{\partial v}{\partial x_i} \qquad (17)$$

Из свойств обратного оператора $(E-G)^{-1}$ имеем также , что система функции $\tilde{v}_i=(E-G)^{-1}g_i$ удовлетворяет условию несжимаемости (4) т.е.

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x_i}=0 \qquad (18)$$

С учетом равенства (7) систему уравнении (1) приведем к виду

$$Lu_i=\frac{\partial u_i}{\partial t}-\nu\Delta u_i+\tilde{v}_i-\frac{\partial(p-v)}{\partial x_i}=$$

$$=\frac{\partial u_i}{\partial t}-\nu\Delta U_i+\tilde{v}_i-\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i}=f_i, \qquad (19)$$

где $\tilde{p}=p-v$ новое искомое давление. С учетом соотношение (18) аналогично как и при выводе равенство (8) имеем

$$-\Delta\tilde{p}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_j}{\partial x_j}, \qquad (20)$$

где

$$\tilde{p}=p_0(t)+\int_{\Omega}G(x,\xi)\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f(\xi,t)}{\partial \xi}d\xi, \qquad (21)$$

тем самым системы уравнения (19) примет вид

$$Lu_i=\frac{\partial u_i}{\partial t}-\nu\Delta u_i+\tilde{v}_i(x,t)-\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i}=f_i, \qquad (22)$$

где нелинейная часть

$$\tilde{v}_i(x,t)=\sum_{j=1}^{n}u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-\sum_{j=1}^{n}\int_{\Omega}\frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial \xi_j}\sum_{q=1}^{n}u_q\frac{\partial u_j}{\partial \xi_q}d\xi, \qquad (23)$$

удовлетворяет условию несжимаемости (4), а $\tilde{p}(x,t)$ функция определяемая формулой (21).

Известными методами см[1] для регулярных решений системы (22) удовлетворяющих условия можно установить следующие априорные оценки:

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}\|u_i\|^2_{W_2^2(D)}\right\|\le C\sum_{i=1}^{n}\|f_i\|_0^2, \qquad (24)$$

Пользуясь априорной оценкой (24) и методом продолжение по параметру можно установить справедливость теоремы 1.

Замечание.

Если область $\Omega\subset R^n$ произвольная конечная область с гладкой границой $\partial\Omega$, то классическую задачу Навье-Стокса

$$Lu_i=\frac{\partial u_i}{\partial t}-\nu\Delta u_i+\sum_{j=1}^{n}u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_i}-\frac{\partial P}{\partial x_i}=f_i, \qquad (25)$$

$$u_i\big|_{t=0}=0, \qquad (26)$$

$$u_i\big|_{\partial\Omega\times(0,T)}=0, \qquad (27)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=0, \qquad (28)$$

методом гладкого продолжения в параллелпипед $\tilde{\Omega}=\{a_i\le x_i\le b_i\}$ всегда можно привести к эквивалентной ей периодической задаче (1)-(4).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Темам Р.* Уравнение Навье-Стокса. М., Мир,1981. С. 408.

Резюме

Навье-Стокс проблемасы периодты жағдайда тұпкілікті шешілген.

Summary

In this paper it is obtained apriory estimates and solve periodic Navier-Stokes problem.