МАТЕМАТИКА

Т. Ш. КАЛЬМЕНОВ

КОЭРЦЕТИВНЫЕ АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ РАЗРЕШИМОСТИ В ЦЕЛОМ ПРОБЛЕМЫ НАВЬЕ-СТОКСА

Доказана разрешимость в целом проблемы Навье–Стокса.

П. 1. В области $D=\{\Omega\times(0,T),\Omega=(0<x_i<2\pi)\}$ рассмотрим следующую задачу:

Задача N-S. Найти в области D регулярное решение системы

$$Lu_i=\frac{\partial u_i}{\partial t}-\nu\Delta u_i+\sum_{j=1}^{n}u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_i}-\frac{\partial p}{\partial x_i}=f_i, \quad (1)$$

периодической по переменным x_i

$$u_i(x+2\pi t)=u_i(x,t), \quad (2)$$

удовлетворимое начальному условию

$$u_i\big|_{t=0}=0 \quad (3)$$

и условию несжимаемости

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=0, \quad \int_0^{2\pi}p(x_1,t)dx_1=0. \quad (4)$$

Основным результатом настающей работы является

Теорема.

Для любой $f_i\in L_2(D)$, $i=1,2,.....,n$ существует единственная решения системы (1) $u_i\in W_2^{L_2}(D)$, $P\in W_2^1(\Omega)\cap L_2(0,T)$ удовлетворяющие, условиям Навье-Стокса (2)-(4) и априорной оценке

$$\sum_{i=1}^{n}\|u_i\|_{w_2^{1,2}(D)}+\int_0^T\|p\|_{w_2^1(\Omega)}dt\le C\sum_{i=1}^{n}\|f_i\|_{L_2(D)}. \quad (5)$$

Краткий ход доказательство.

Пусть $u_i\in W_2^3(D)$, и $P\in W_2^2(D)$ тогда из система (1) с учетом условии несжимаемости (4) получим

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}Lu_i=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\sum_{j=1}^{n}u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-\Delta p=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_i}. \quad (6)$$

Обозначив через

$$v_i(xt)=\sum_{j=1}^{n}u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad (7)$$

из соотношении (6) имеем

$$-\Delta p=-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial v_i}{\partial x_i}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_i}, \quad p(x+2\pi,t)=p(x,t). \quad (8)$$

Отсюда в силу выполнения условия разрешимости задачи (8) получаем

$$P(x,t)=p_0(t)+\int_\Omega G\,(x,\xi)\left(-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial v_i}{\partial\xi_i}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial f_j}\right)d\xi, \quad (9)$$

где $G(x,\xi)$ - функция Грина задачи

$$-\nu\Delta G=\delta(x-\xi),\ G(x+2\pi)=G(x), \quad (10)$$

а $p_0(t)\in L_2(0\times T)$ произвольная функция.

Отметим что

$$G(x,\xi)=\sum_{m^2=1}^{\infty}\frac{e^{i(m,x-\xi)}}{\nu m^2},$$

$$m=(m_1,m_2,m_3,.....m_n),$$

$$m^2=m_1^2+m_2^2.....m_n^2. \quad (11)$$

Подставив правую часть равенства (9) в уравнение (1) относительно неизвестных v_j получим систему интегральных уравнений

$$v_i-\sum_{j=1}^{n}\int_\Omega\frac{\partial^2 G}{\partial x_i\partial\xi_j}v_j(\xi,t)d\xi=$$

$$=f_i-\sum_{j=1}^{n}\int_\Omega\frac{\partial^2 G}{\partial x_i\partial\xi_j}f_j(\xi,t)d\xi-\frac{\partial u_i}{\partial t}+\nu\Delta u_i=g_i(x,t),$$

$$i=1,2,.....,n \quad (12)$$

Пользуясь разложениями

$$u_i(x,t)=\sum_{m^2=1}^{\infty}e^{i(m,x)}u_{im,j}(t),$$

$$g_i(\xi,t)=\sum_{m^2=0}^{\infty} e^{i(m,x)} g_{im,j}(t),\ i=1,2,...n \quad (13)$$

и представлением функции Грина $G(x,\xi)$ - т.е формулой (11) можно доказать

Лемму 1. Однородные системы уравнения

$$v_i-\sum_{j=1}^{n}\int_{\Omega}\frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial \xi_j} v_j(\xi,t)d\xi=0, \quad i=1,2,...n. \quad (14)$$

имеет нетривиальное решение v_i^0 - представимой только формулой

$$v_i^0(x,t)=\frac{\partial v(x,t)}{\partial x_i}, \quad (15)$$

где $v(x,t)$ - скалярная функция.

Из условий несжимаемости (4) и соотношения (12) и в силу симметричности ядер $\frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial \xi_j}$ легко проверить что

$$\sum_{m^2=1}^{\infty}(g_i, v_i^0)=0,\ i=1,2,...n. \quad (16)$$

Поэтому общее решение систем уравнений (12) определяется формулой

$$v(x,t)=(E-G)^{-1}g_i+v_i^0=$$

$$=(E-G)^{-1}g_i+\frac{\partial v}{\partial x_i}=\widetilde{v}_i+\frac{\partial v}{\partial x_i}. \quad (17)$$

Из свойств обратного оператора $(E-G)^{-1}$ имеем также, что система функции $\widetilde{v}_i=(E-G)^{-1}g_i$ удовлетворяет условию несжимаемости (4), т.е.

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \widetilde{v}_i}{\partial x_i}=0. \quad (18)$$

С учетом равенства (7) систему уравнении (1) приведем к виду

$$Lu_i=\frac{\partial u_i}{\partial t}-v\Delta u_i+\widetilde{v}_i-\frac{\partial(p-v)}{\partial x_i}=$$

$$=\frac{\partial u_i}{\partial xt}-v\Delta u_i+\widetilde{v}_i-\frac{\partial \widetilde{p}}{\partial x_i}=f_i, \quad (19)$$

где $\widetilde{p}=p-v$ новое искомое давление. С учетом соотношение (18) и (4) аналогично как и при выводе равенство (8) имеем

$$-\Delta\widetilde{p}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_j}{\partial x_j}, \quad (20)$$

где

$$\widetilde{p}=-\sum_{j=1}^{n}\int_{\Omega}\frac{G(x,\xi)}{\partial \xi}f_j(x,t)d\xi, \quad (21)$$

тем самым системы уравнения (19) примет вид

$$Lu_i=\frac{\partial u_i}{\partial t}-v\Delta u_i+\widetilde{v}_i(x,t)-\frac{\partial \widetilde{p}}{\partial x_i}=f_i, \quad (22)$$

где нелинейная часть

$$\widetilde{v}_i(x,t)=\sum_{j=1}^{n}u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-\sum_{j=1}^{n}\int_{\Omega}\frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial \xi_j}\sum_{q=1}^{n}u_q\frac{\partial u_j}{\partial x_q}d\xi, \quad (23)$$

удовлетворяет условию несжимаемости (4), а $\widetilde{p}(x,t)$ функция определяемая формулой (21). В силу условия (4) $p\in w_2^1(\Omega)\cap L_2(0,T)$ и удовлетворяет неравенству

$$\|p\|_{w_2^1(0,\tau)\cap L_2(0,\tau)}\le C\sum_{i=1}^{n}\|f_i\|_0. \quad (24)$$

Известными методами см. [1] для регулярных решений системы (22) удовлетворяющих условия (2)–(4) можно установить следующие априорные оценки:

$$\sum_{i=1}^{n}\|u_i\|^2_{w_2^{1,2}(D)}\le C\sum_{i=1}^{n}\|f_i\|_0^2, \quad (25)$$

Пользуясь априорной оценкой (24) и (25) и методом продолжение по параметру, можно установить справедливость теоремы 1.

П. 2. Если $\Omega\subset R^n$ произвольная конечная область с гладкой границой $\partial\Omega$, то классическая задача Навье-Стокса в области $D=\Omega\times(0,T)$

$$Lu_i=\frac{\partial u_i}{\partial t}-v\Delta u_i+\sum_{j=1}^{n}u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_i}-\frac{\partial P}{\partial x_i}=f_i, \quad (26)$$

$$u_i\big|_{t=0}=0, \quad u_i\big|_{\partial\Omega x(0,T)}=0,$$

$$\sum_{j=1}^{n}u_j\frac{\partial u_i}{\partial x}=0,\ p\big|_{\partial\Omega\cap t=\tau}-p\big|_{\partial\Omega\cap}=0 \quad (27)$$

как и выше в периодическом случае сводится к соответствующей задаче для уравнения:

$$Lu_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} - \nu\Delta u_i + (E-Q)\sum_{j=1}^{n} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = (E-Q)f_i, \quad (28)$$

$$(Qv)_i = \sum_{j=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial \xi_j} v_j(\xi,t)\,d\zeta, \quad (29)$$

а $G(x,\xi)$ - функция Грина задачи Дирихле

$$-\Delta G(x,\xi) = \delta(x-\xi), \quad G\big|_{x\in\partial\Omega} = 0. \quad (30)$$

Давление в этом случае задается формулой (31)

$$p = -\sum_{j=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial G}{\partial \xi_j}(x,\xi) f_j(\xi,t)\,d\xi. \quad (31)$$

Обозначив

$$\Delta u_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} - \nu\,\Delta u_i = g_i, \quad (32)$$

находим

$$u_i = \Diamond^{-1} g_i = \int_0^t d\tau \int_{\Omega} G(x,t,\xi,\tau) g_j(\xi,\tau)\,d\xi, \quad (33)$$

где $G(x,t,\xi,\tau)$ функция Грина задачи:

$$\left(\frac{\partial}{\partial e} - \nu\Delta\right) G(x,t,\xi,\tau) = \delta(x-\xi, t-\tau),$$

$$G\big|_{t=0} = 0, \; G\big|_{x\in\partial\Omega} = 0 \quad (34)$$

Функция Грина представим в виде

$$G(x,t,\xi,\tau) = \quad (35)$$

$$= \sum_{m_1=\infty}^{\infty} \ldots\ldots\ldots \sum_{m_n=-\infty}^{\infty} \theta(t-\tau)\, e^{-\lambda_m(t-\tau)}\, u_m(x) u_m(\xi),$$

где $u_m(x)$ - ортонормированные собственные функции спектральной задачи

$$-\nu\Delta u_m = \lambda_m u_m, \quad u_m\big|_{\partial\Omega} = 0. \quad (36)$$

С учетом равенства (35) из соотношения (33) следует

$$u_i = \Diamond^{-1} g_i = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-\lambda_m(t-\tau)} \quad g_i(\tau)\, u_m(x), \quad (37)$$

$$g_{im}(\tau) = \int_{\Omega} g_i(x,\tau) u_m(x)\,dx, \quad m = (m_1, m_2, \ldots\ldots, m_n) \quad (38)$$

Если $g_i = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g_{im}(t)\; u_m(x) \in L_2(D)$, то в силу известных свойств $\left|\frac{\partial}{\partial x_j} u_m\right| \le C\sqrt{|\lambda_m|}\,\|u_m\|$ следует что

$$\left\|\Diamond^{-1} g_i\right\|_{C(\bar{D})} = \|u_i\|_{C(\bar{D})} \le CT^{\frac{1}{2}} \|g_i\|_0, \quad (39)$$

$$\left\|\Diamond^{-1} g_i\right\|_{W_2^1(\Omega)\cap L_2(0,T)} \le CT^{\frac{1}{2}} \|g_i\|_{L_2(D)}, \quad (40)$$

$$\|u_i\|_{W_2^{1,2}(D)} = \left\|\Diamond^{-1} g_i\right\|_{W_2^{1,2}(D)} \le C\|g_i\|_0. \quad (41)$$

Принимая во внимание соотношение (30) систем уравнения (28),перепишем в интегральной форме

$$g_i + (E-Q)\sum_{j=1}^{n} \Diamond^{-1} g_j \frac{\partial}{\partial x_j} \Diamond^{-1} g_j = (E-Q) f_i. \quad (42)$$

Если $\|g_j\|_{L_2(D)} < M \quad i = 1,2,\ldots\ldots\ldots n$, то в области $D_\delta = \Omega \cap 0 < t < \delta$, используя оценки (39) и (41) можно доказать разрешимость интегрального уравнения в и оценку

$$\sum_{j=1}^{n} \|g_i\|_{L_2(D_\delta)} \le C\sum_{j=1}^{n} \|(E-Q)\, f_i\|_{L_2(D_\delta)}. \quad (43)$$

Далее, разбивая отрезок $[0,T]$ на отрезки $[j,\delta,(j+1)\delta]$, убеждаемся в однозначном разрешимости интегрального уравнения (36) в $L_2(D)$ целом и выполнении неравенства

$$\sum_{j=1}^{n} \|g_i\|_{L_2(D)} \le C\sum_{i=1}^{n} \|(E-Q)\, f_i\|_{L_2(D)}. \quad (44)$$

На основании соотношения (31), (39)–(41), (44) доказана

Теорема 2. Для всех $f_i \in C(D)$, $i = 1;2\ldots n$ существует единственное решение задачи (25)-(28) $u_i \in w_2^{1,2}(D)$, $P_i \in w_2^1(\Omega) \wedge L_2(o,T)$ удовлетворяющее неравенству

$$\sum_{i=1}^{n} \|u_i\|_{w_2^{1,2}(D)} + \|p\|_{w_2^1(\Omega)\wedge L_2(0,T)} \le C\sum_{i=1}^{n} \|f_i\|_{L_2(D)}. \quad (45)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Темам Р.* Уравнения Навье-Стокса. М.: Мир, 1981.

Резюме

Коэрцетивті априорлық теңсіздіктерді қолдану арқылы Навье-Стокс проблемасы толық шешілген.

Summary

In this paper it is solved problem Nave-Stoks in whole.

Поступила 25.06.08г.