МАТЕМАТИКА

УКД 517.94

Т.Ш. КАЛЬМЕНОВ, Н.Е. ТОКМАГАМБЕТОВ

О ГРАНИЧНОМ УСЛОВИИ ОБЪЕМНОГО ТЕПЛОВОГО ПОТЕНЦИАЛА

В работе получены граничные условия объемного теплового потенциала в цилиндрической области, и рассмотрена смешанная задача Коши с неоднородным граничным условием объемного теплового потенциала.

1. Граничное условие объемного теплового потенциала

В цилиндрической области $(x,t)\in\Omega\times(0,T)$, где $\Omega\subset R^n$ – ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$ рассмотрим объемный тепловой потенциал

$$u(x,t)=\int_0^t\int_\Omega \varepsilon(x-\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau, \qquad (1)$$

где $\varepsilon(x,t)=\dfrac{\theta(t)}{(2\sqrt{\pi t})^{n/2}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ – фундаментальное решение задачи Коши для уравнения теплопроводности (см. [1]), т.е.

$$\Diamond_{x,t}\varepsilon(x-\xi,t-\tau)=\frac{\partial\varepsilon(x-\xi,t-\tau)}{\partial t}-$$
$$-\Delta_x\varepsilon(x-\xi,t-\tau)=\delta(x-\xi,t-\tau),$$
$$\Diamond^+_{\xi,\tau}\varepsilon(x-\xi,t-\tau)=-\frac{\partial\varepsilon(x-\xi,t-\tau)}{\partial\tau}-$$
$$-\Delta_\xi\varepsilon(x-\xi,t-\tau)=\delta(x-\xi,t-\tau) \qquad (2)$$

Известно, что (см.[7]), если функция $f(x,t)\in C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}_{x,t}$, то $u(x,t)\in C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}_{x,t}$, где $0<\alpha<1$ и

$$\Diamond u(x,t)=f(x,t), \qquad (3)$$
$$u(x,0)=0. \qquad (4)$$

Ниже находим боковые граничные условия, определяемые объемным тепловым потенциалом (1).

Теорема 1. Для любой $f(x,t)\in C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}_{x,t}$ объемный тепловой потенциал (1) удовлетворяет граничному условию

$$\frac{u(x,t)}{2}+\int_0^t\int_{\partial\Omega}\frac{\partial\varepsilon(x-\xi,t-\tau)}{\partial n_\xi}u(\xi,\tau)-$$
$$-\frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial n_\xi}\varepsilon(x-\xi,t-\tau)d\xi d\tau=0,\quad x\in\partial\Omega, \qquad (5)$$

где $\dfrac{\partial}{\partial n_\xi}$ – производная по внутренней нормали боковой границы.

Если функция $u(x,t)\in C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}_{x,t}$ удовлетворяет уравнению (3) и начальному условию (4), а также боковому граничному условию (5), то функция $u(x,t)$ определяет объемный тепловой потенциал (1).

Доказательство. Предполагая, что $u(x,t)\in C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}_{x,t}$ с учетом свойств фундаментального решения [1] и непосредственным вычислением для любого $(x,t)\in\Omega\times(0,T)$ имеем

$$u(x,t)=\int_0^t\int_\Omega\varepsilon(x-\xi,t-\tau)\Diamond u(\xi,\tau)d\xi d\tau=I_1+I_2, \qquad (6)$$

$$I_1=\int_0^t\int_\Omega\varepsilon(x-\xi,t-\tau)\frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial\tau}d\xi d\tau=$$
$$=\int_\Omega\varepsilon(x-\xi,t-\tau)u(\xi,\tau)\Big|_0^t d\xi-\int_0^t\int_\Omega u(\xi,\tau)\frac{\partial\varepsilon(x-\xi,t-\tau)}{\partial\tau}d\xi d\tau=$$
$$=u(x,t)-\int_0^t\int_\Omega u(\xi,\tau)\frac{\partial\varepsilon(x-\xi,t-\tau)}{\partial\tau}d\xi d\tau,$$

$$I_2=-\int_0^t\int_\Omega\varepsilon(x-\xi,t-\tau)\Delta_\xi u(\xi,\tau)d\xi d\tau=$$
$$=-\int_0^t\int_\Omega\frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial n_\xi}\varepsilon(x-\xi,t-\tau)d\xi d\tau$$
$$+\int_0^t\int_{\partial\Omega}\frac{\partial\varepsilon(x-\xi,t-\tau)}{\partial n_\xi}u(\xi,\tau)d\xi d\tau-\int_0^t\int_\Omega\Delta_\xi\varepsilon(x-\xi,t-\tau)u(\xi,\tau)d\xi d\tau$$

т.е.

$$u(x,t)=\int_0^t\int_\Omega\varepsilon(x-\xi,t-\tau)\Diamond_{\xi,\tau}u(\xi,\tau)d\xi d\tau=I_1+I_2=$$
$$=u(x,t)-\int_0^t\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial n_\xi}\varepsilon(x-\xi,t-\tau)d\xi d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_{\partial\Omega}\frac{\partial\varepsilon(x-\xi,t-\tau)}{\partial n_\xi}u(\xi,\tau)d\xi d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_{\Omega}\Diamond^+_{\xi,\tau}\varepsilon(x-\xi,t-\tau)u(\xi,\tau)d\xi d\tau.$$

Отсюда следует

$$\int_0^t\int_{\partial\Omega}-\frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial n_\xi}\varepsilon(x-\xi,t-\tau)+$$

$$+\frac{\partial\varepsilon(x-\xi,t-\tau)}{\partial n_\xi}u(\xi,\tau)d\xi d\tau=0,\quad \forall(x,t)\in\Omega\times(0,T).\ (7)$$

С учетом свойств потенциала [5] двойного и простого слоя из (7), при $(x,t)\to\partial\Omega\times(0,T)$ находим, что

$$\frac{u(x,t)}{2}+\int_0^t\int_{\partial\Omega}-\frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial n_\xi}\varepsilon(x-\xi,t-\tau)d\xi d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_{\partial\Omega}\frac{\partial\varepsilon(x-\xi,t-\tau)}{\partial n_\xi}u(\xi,\tau)d\xi d\tau=0,$$

$$\forall(x,t)\in\partial\Omega\times(0,T).\ (8)$$

Тем самым объемный тепловой потенциал (1) удовлетворяет боковому граничному условию (8).

Обратно, если решение уравнения $\Diamond u=f$, где $u(x,t)\in C_{x,t}^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}$ удовлетворяет начальному условию (4) и боковому граничному условию (8), то оно задается формулой (1), т.е. порождает объемный тепловой потенциал (1).

Действительно, если u_1 удовлетворяют уравнению (3), начальному условию (4) и боковому граничному условию (8), то $u_1\equiv u$, где u объемный тепловой потенциал (1). Если не так, то функция $v=u_1-u$ удовлетворяет уравнению

$$\Diamond v(x,t)=0,\qquad (9)$$

$$v(x,0)=0,\qquad (10)$$

и однородному условию

$$\frac{v(x,t)}{2}+\int_0^t\int_{\partial\Omega}-\frac{\partial v(\xi,\tau)}{\partial n_\xi}\varepsilon(x-\xi,t-\tau)d\xi d\tau+$$

$$+\int_0^t\int_{\partial\Omega}\frac{\partial\varepsilon(x-\xi,t-\tau)}{\partial n_\xi}v(\xi,\tau)d\xi d\tau=0,$$

$$\forall(x,t)\in\partial\Omega\times(0,T).\qquad (11)$$

Обозначим через

$$I_v(x,t)=\int_0^t\int_{\partial\Omega}\frac{\partial\varepsilon(x-\xi,t-\tau)}{\partial n_\xi}v(\xi,\tau)-$$

$$-\frac{\partial v(\xi,\tau)}{\partial n_\xi}\varepsilon(x-\xi,t-\tau)d\xi d\tau,\quad \forall(x,t)\in\Omega\times(0,T).$$

С другой стороны, используя (9) и (10) мы получаем следующее:

$$0=\int_0^t\int_{\Omega}\varepsilon(x-\xi,t-\tau)\Diamond v d\xi d\tau=v(x,t)+I_v(x,t),$$

$$\forall(x,t)\in\Omega\times(0,T).\qquad (12)$$

Переходя к пределу $(x,t)\to\partial\Omega\times(0,T)$, получим следующее

$$v(x,t)|_{\partial\Omega\times(0,T)}=-I_v(x,t)|_{\partial\Omega\times(0,T)}=0$$

То есть задача (9)-(11) эквивалентна задаче

$$\Diamond v(x,t)=0,\qquad (13)$$

$$v(x,0)=0,\qquad (14)$$

$$v(x,t)|_{\partial\Omega\times(0,T)}=0.\qquad (15)$$

Решение однородной смешанной задачи (13)-(15) согласно принципу максимума $v(x,t)\equiv 0$, $\forall(x,t)\in\Omega\times(0,T)$, т. е. получим $v=u_1-u\equiv 0$ и $u_1\equiv u$. Таким образам, боковое граничное условие (8) и начальное условие (4) для уравнения теплопроводности (3) порождает объемный тепловой потенциал однозначно. Теорема 1 доказана.

2. Смешанная задача Коши с неоднородным граничным условием объемного теплового потенциала.

Для любой $f(x,t)\in C_{x,t}^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}$ рассмотрим решение $u(x,t)\in C_{x,t}^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}$ неоднородного уравнения теплопроводности

$$\Diamond u=f(x,t),\qquad (16)$$

удовлетворяющее однородному начальному условию

$$u(x,0)=0,\qquad (17)$$

и неоднородному боковому граничному условию

$$I_u(x,t)|_{\partial\Omega\times(0,T)}=\frac{u(x,t)}{2}-\int_0^t\int_{\partial\Omega}\frac{\partial\varepsilon(x-\xi,t-\tau)}{\partial n_\xi}u(\xi,\tau)-$$

$$-\frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial n_\xi}\varepsilon(x-\xi,t-\tau)d\xi d\tau\Big|_{\partial\Omega\times(0,T)}$$

$$=\varphi(x,t).\qquad (18)$$

Решим эту задачу по методу суперпозиций, т.е. отдельно решив следующие задачи, а затем сложив их решения, получим решение задачи (16)-(18).

Для этого решим следующую задачу с неоднородным боковым граничным условием:

$$\Diamond u = 0, \qquad (19)$$

$$u(x,0) = 0, \qquad (20)$$

$$I_u(x,t)\Big|_{\partial\Omega\times(0,T)} = \frac{u(x,t)}{2} - \int_0^t\int_{\partial\Omega}\frac{\partial\varepsilon(x-\xi,t-\tau)}{\partial n_\xi}u(\xi,\tau) -$$

$$-\frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial n_\xi}\varepsilon(x-\xi,t-\tau)d\xi d\tau\Bigg|_{\partial\Omega\times(0,T)}$$

$$= \varphi(x,t). \qquad (21)$$

Непосредственным вычислением находим

$$0 = \int_0^t\int_\Omega \varepsilon(x-\xi,t-\tau)0d\xi d\tau = \int_0^t\int_\Omega \varepsilon(x-\xi,t-\tau)\Diamond u(\xi,\tau)d\xi d\tau =$$

$$= \int_0^t\int_\Omega \Diamond\varepsilon(x-\xi,t-\tau)u(\xi,\tau)d\xi d\tau -$$

$$-\int_0^t\int_{\partial\Omega}\varepsilon(x-\xi,t-\tau)\frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial n_\xi} - \frac{\partial\varepsilon(x-\xi,t-\tau)}{\partial n_\xi}u(\xi,\tau)d\xi d\tau =$$

$$= u(x,t) - \int_0^t\int_{\partial\Omega}\varepsilon(x-\xi,t-\tau)\frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial n_\xi} - \frac{\partial\varepsilon(x-\xi,t-\tau)}{\partial n_\xi}u(\xi,\tau)d\xi d\tau$$

То есть

$$u(x,t) = \int_0^t\int_{\partial\Omega}\varepsilon(x-\xi,t-\tau)\frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial n_\xi} - \frac{\partial\varepsilon(x-\xi,t-\tau)}{\partial n_\xi}u(\xi,\tau)d\xi d\tau$$

и, при $(x,t)\to\partial\Omega\times(0,T)$ получим

$$u(x,t)\Big|_{\partial\Omega\times(0,T)} = -\frac{u(x,t)}{2} + \int_0^t\int_{\partial\Omega}\frac{\partial\varepsilon(x-\xi,t-\tau)}{\partial n_\xi}u(\xi,\tau) -$$

$$-\frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial n_\xi}\varepsilon(x-\xi,t-\tau)d\xi d\tau\Bigg|_{\partial\Omega\times(0,T)} =$$

$$= -I_u(x,t)\Big|_{\partial\Omega\times(0,T)} = -\varphi(x,t).$$

Из этого следует, что решение задачи (19)-(21) сводится к решению следующей смешанной задачи Коши:

$$\Diamond u = 0, \quad (19')$$

$$u(x,0) = 0, \quad (20')$$

$$u\Big|_{\partial\Omega\times(0,T)} = -\varphi(x,t). \qquad (21)$$

Решение смешанной задачи (19)-(21) представим в виде (см. [6])

$$u(x,t) = -\int_0^t\int_\Omega\frac{\partial G(x,\xi,t,\tau)}{\partial n_\xi}\varphi(\xi,\tau)d\xi d\tau,$$

где $G(x,\xi,t,\tau)$ функция Грина, которое удовлетворяет следующему:

$$\Diamond G(x,\xi,t,\tau) = \delta(x-\xi,t-\tau), \qquad (22)$$

$$G(x,\xi,t,\tau)\Big|_{t=0} = 0, \qquad (23)$$

$$G(x,\xi,t,\tau)\Big|_{x\in\partial\Omega\times(0,T)} = 0. \qquad (24)$$

Из теоремы 1 следует решение задачи

$$\Diamond u = f(x,t), \qquad (25)$$

$$u(x,0) = 0, \qquad (26)$$

$$I_u(x,t)\Big|_{\partial\Omega\times(0,T)} = \frac{u(x,t)}{2} - \int_0^t\int_{\partial\Omega}\frac{\partial\varepsilon(x-\xi,t-\tau)}{\partial n_\xi}u(\xi,\tau) -$$

$$-\frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial n_\xi}\varepsilon(x-\xi,t-\tau)d\xi d\tau\Bigg|_{\partial\Omega\times(0,T)} = 0. \qquad (27)$$

совпадает с объемным тепловым потенциалом (1). Тем самым решение задачи (16)-(18) задается формулой

$$u(x,t) = \int_0^t\int_\Omega\varepsilon(x-\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau -$$

$$-\int_0^t\int_\Omega\frac{\partial G(x,\xi,t,\tau)}{\partial n_\xi}\varphi(\xi,\tau)d\xi d\tau. \qquad (28)$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. Решение смешанной задачи Коши $u(x,t)\in C_{x,t}^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}$ с боковым неоднородным граничным условием объемного теплового потенциала (16)-(18) задается формулой (28), где $G(x,\xi,t,\tau)$ функция Грина классической смешанной задачи Коши (22)-(24).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512с.
2. *Кальменов Т.Ш., Сураган Д.* К спектральным вопросам объемного потенциала. // Доклады академии наук России. 2009. Т. 428. №4. С.16-19.
3. *Бицадзе А. В.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1982. 336с.
4. *Брело М.* Основы классической теории потенциала. М.: Мир, 1974. 226с.
5. *Гюнтер Н.* Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. М.: 1953, 415с.
6. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М., 1999. 735с.
7. *Крылов Н.В.* Лекции по эллиптическим и параболическим уравнениям в пространствах Гелдера. Новосибирск: 1998. 176с.

Резюме

Бұл жұмыстың бірінші бөлігінде цилиндрлік облыстағы көлемдік жылу потенциалының шекаралық шарттары алынды. Ал екінші бөлігінде көлемдік жылу потен-

циалының шекаралық шартымен анықталған аралас Коши есебі қарастырылды.

Summary

In this paper, In the first section a boundary condition of volumetric thermal potential is given in cylindrical area. And in the second section mixed problem Couchy with a non-homogeneous boundary condition of volumetric thermal potential is considered.

Институт математики, механики и информатики

Поступила 01.02.10 г.