МАТЕМАТИКА

УДК 517.944/.947

Т.Ш. КАЛЬМЕНОВ, Н.Е. ТОКМАГАМБЕТОВ

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

РГП «Институт математики, информатики и механики», г.Алматы

В работе путем построения специального внешнего объемного потенциала решение смешанной задачи Коши для одномерного уравнения теплопроводности выписывается в квадратурах.

Уравнения с частными производными второго порядка параболического типа наиболее часто встречаются при изучении процессов теплопроводности и диффузии. В виду теоретической и прикладной важности изучения смешанной задачи Коши для модельного уравнения теплопроводности посвящены многочисленные работы. Среди них особо отметим монографии [1]-[3], в которых приведены основные методы исследования: метод Фурье, метод интегральных уравнений, метод априорных оценок. Но в то же время выписать решение в виде интегрального представления через известные и заданные функции до сих пор не удавалось. В данной работе этот пробел восполняется для одномерного уравнения теплопроводности.

При решении одномерной смешанной задачи Коши существенно используется метод внешних потенциалов – специальное продолжение решения на все полупространство. Идея метода основывается на возможности представления общего решения уравнения только в виде объемных потенциалов, не привлекая поверхностные потенциалы. Получаемая таким методом система интегральных уравнений (в отличие от возникающей при классическом методе потенциала) допускает обращение и построение решения в квадратурах.

В плоской области $\Omega = \{0 < x < 1, 0 < t < T\}$ рассмотрим следующую задачу.

<u>Смешанная задача Коши.</u> Найти в области Ω регулярное решение уравнения

$$\Diamond u(x,t) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(x,t) = f(x,t), \qquad (1)$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u(x,0) = 0 \qquad (2)$$

и граничным условиям

$$u(0,t) = u(1,t) = 0. \qquad (3)$$

Нашей целью является построение классического решения задачи (1)-(3) в квадратурах. Решение задачи ищем в виде суммы трех объемных потенциалов:

$$u(x,t) = u_f(x,t) + u_{g_0}(x,t) + u_{g_1}(x,t), \qquad (4)$$

где

$$u_f(x,t) = (\varepsilon_1 * f)(x,t) = \int_0^t d\tau \int_0^1 \frac{\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}\right)}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} f(\xi,\tau)d\xi,$$

$$u_{g_0}(x,t) = (\varepsilon_1 * g_0)(x,t) = \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^0 \frac{\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}\right)}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} g_0(\xi,\tau)d\xi,$$

$$u_{g_1}(x,t) = (\varepsilon_1 * g_1)(x,t) = \int_0^t d\tau \int_1^{+\infty} \frac{\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}\right)}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} g_1(\xi,\tau)d\xi.$$

Здесь $\varepsilon_1(x,t) = \theta(t)(2\sqrt{\pi t})^{-1}\exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right)$ – фундаментальное решение уравнения теплопроводности (1), а $\theta(t) = \begin{cases} 1, t > 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$ – тэта-функция Хевисайда.

Не трудно видеть, что в представлении (4) при $0 < x < 1$ первое слагаемое $u_f(x,t)$ является решением неоднородного уравнения (1) , а второе и третье $u_{g_0}(x,t) + u_{g_1}(x,t)$ - решениями однородного уравнения. Следовательно, представле-

ние (4) при любых g_0 и g_1 дает решение неоднородного уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию (2). Наша задача – подобрать функции $g_0(x,t)$ и $g_1(x,t)$ так, чтобы $u(x,t)$ удовлетворяла граничному условию (3).

Функции $g_0(x,t)$ и $g_1(x,t)$ будем искать в виде

$$g_0(x,t)=x\theta(-x)g_0(t),\ g_1(x,t)=(x-1)\theta(x-1)g_1(t). \quad (5)$$

Через $\varphi(x)$ – обозначим периодическую с периодом 2π функцию, заданную на интервале $(0,2\pi)$ равенством $\varphi(x)=\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4\pi}$. Для значений аргумента вне интервала $(0,2\pi)$ она может быть представлена в виде (см. [1], стр. 112) $\varphi(x)=\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}\frac{1}{k^2}\exp(ikx)$.

Введем обозначения:

$$G_0(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}(\varphi_0(x)+\frac{x^2}{4\pi})\frac{d^2}{dx^2}\exp(-\frac{|x|^2}{4(\pi)^2t})dx,$$

$$G_1(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}(\varphi_0(x-\pi)+\frac{(x-\pi)^2}{4\pi})\frac{d^2}{dx^2}\exp(-\frac{|x|^2}{4(\pi)^2t})dx. \quad (6)$$

$$F_0(t)=u_f(x,t)\big|_{x=0}=\int_0^t d\tau\int_0^1\frac{\exp(-\frac{|\xi|^2}{4(t-\tau)})}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}f(\xi,\tau)d\xi,$$

$$F_1(t)=u_f(x,t)\big|_{x=1}=\int_0^t d\tau\int_0^1\frac{\exp(-\frac{(1-\xi)^2}{4(t-\tau)})}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}f(\xi,\tau)d\xi. \quad (7)$$

Основным результатом настоящей работы является

Теорема. Пусть $f(x,t)\in C^{1+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(\overline{\Omega}),0<\alpha<1$. Тогда решение смешанной задачи (1)-(3) представляется формулой (4), где $g_0(x,t)$ и $g_1(x,t)$ задаются равенствами (5) и

$$g_0(t)=\frac{d^2}{dt^2}\int_0^t[G_0(t-\tau)F_0(\tau)-G_1(t-\tau)F_1(\tau)]d\tau,$$

$$g_1(t)=-\frac{d^2}{dt^2}\int_0^t[G_0(t-\tau)F_1(\tau)-G_1(t-\tau)F_0(\tau)]d\tau.$$

При доказательстве теоремы важную роль играет

Лемма. Пусть неизвестные функции $g_0(x,t)$ и $g_1(x,t)$ задаются равенствами (5). Тогда функции $g_0(t)$ и $g_1(t)$ удовлетворяют системе уравнений:

$$\int_0^t\frac{g_0(\tau)}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}}d\tau-\int_0^t\frac{\exp(-\frac{1}{4\pi(t-\tau)})}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}}g_1(\tau)d\tau=\frac{d}{dt}F_0(t),$$

$$\int_0^t\frac{g_1(\tau)}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}}d\tau-\int_0^t\frac{\exp(-\frac{1}{4\pi(t-\tau)})}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}}g_0(\tau)d\tau=-\frac{d}{dt}F_1(t), \quad (8)$$

где $F_0(t),F_1(t)$ определены в (7).

Доказательство. Подставив функцию (4) в граничные условия (3), с учетом обозначений (7), получим систему интегральных уравнений относительно неизвестных $g_0(t)$ и $g_1(t)$:

$$\int_0^t g_0(\tau)d\tau\int_{-\infty}^0\frac{\exp(-\frac{\xi^2}{4\pi(t-\tau)})}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}}\xi d\xi+$$

$$+\int_0^t g_1(\tau)d\tau\int_1^{+\infty}\frac{\exp(-\frac{\xi^2}{4\pi(t-\tau)})}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}}(\xi-1)d\xi=-F_0(t), \quad (9)$$

$$\int_0^t g_0(\tau)d\tau\int_{-\infty}^0\frac{\exp(-\frac{(\xi-1)^2}{4\pi(t-\tau)})}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}}\xi d\xi+$$

$$+\int_0^t g_1(\tau)d\tau\int_1^{+\infty}\frac{\exp(-\frac{(\xi-1)^2}{4\pi(t-\tau)})}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}}(\xi-1)d\xi=-F_1(t). \quad (10)$$

Интегрируя по частям, несложно убедиться в справедливости следующих равенств:

$$\int_{-\infty}^0\frac{\exp(-\frac{\xi^2}{4\pi(t-\tau)})}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}}\xi d\xi=-$$

$$-\frac{2}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}\int_{-\infty}^0\frac{\partial}{\partial\xi}\exp(-\frac{\xi^2}{4\pi(t-\tau)})d\xi=-\frac{\sqrt{(t-\tau)}}{\sqrt{\pi}};$$

$$\int_1^{\infty}\frac{\exp(-\frac{\xi^2}{4\pi(t-\tau)})}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}}(\xi-1)d\xi=\frac{\sqrt{(t-\tau)}}{\sqrt{\pi}}-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{1}{2\sqrt{(t-\tau)}}}^{\infty}\exp(-\xi^2)d\xi.$$

Производя в оставшихся двух интегралах из (9), (10) замену $\xi:=1-\xi$, систему преобразуем к виду:

$$\int_0^t\frac{\sqrt{(t-\tau)}}{\sqrt{\pi}}g_0(\tau)d\tau-\int_0^t[\frac{\sqrt{(t-\tau)}}{\sqrt{\pi}}\exp(-\frac{1}{4\sqrt{(t-\tau)}})-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{1}{2\sqrt{(t-\tau)}}}^{\infty}\exp(-\xi^2)d\xi]g_1(\tau)d\tau = F_0(t),$$

$$\int\limits_0^t[\frac{\sqrt{(t-\tau)}}{\sqrt{\pi}}\exp(-\frac{1}{4\sqrt{(t-\tau)}})-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{1}{2\sqrt{(t-\tau)}}}^{\infty}\exp(-\xi^2)d\xi]g_0(\tau)d\tau-\int\limits_0^t\frac{\sqrt{(t-\tau)}}{\sqrt{\pi}}g_1(\tau)d\tau = F_1(t).$$

Дифференцируя полученное, приходим к (8). Лемма доказана.

Построим теперь решение системы (8) . Пользуясь свойствами преобразования Лапласа (см. [4], стр. 402)

$$F(\frac{\exp(-\frac{\alpha^2}{4t})}{\sqrt{t}}) = \sqrt{\pi}\frac{\exp(\alpha\sqrt{p})}{\sqrt{p}}, F(f*g) =$$

$$= \tilde{f}(p)\tilde{g}(p), F(\frac{d}{dt}f) = p\tilde{f}(p),$$

систему (8) преобразуем к виду:

$$\frac{\tilde{g}_0(p)}{\sqrt{p}}-\frac{\tilde{g}_1(p)}{\sqrt{p}}\exp(-\sqrt{p}) = p\tilde{F}_0(p),$$

$$-\frac{\tilde{g}_0(p)}{\sqrt{p}}\exp(-\sqrt{p})+\frac{\tilde{g}_1(p)}{\sqrt{p}} = -p\tilde{F}_1(p),$$

где $\tilde{g}_0(p) = F(g_0)(p), \tilde{g}_1(p) = F(g_1)(p)$ - образы при преобразовании Лапласа.

Решив эту линейную систему относительно $\tilde{g}_0(p)$ и $\tilde{g}_1(p)$, находим

$$\tilde{g}_0(p) = \frac{p^2}{\sqrt{p}}(\frac{\tilde{F}_0(p)-\tilde{F}_1(p)\exp(-\sqrt{p})}{1-\exp(-2\sqrt{p})}),$$

$$\tilde{g}_1(p) = -\frac{p^2}{\sqrt{p}}(\frac{\tilde{F}_1(p)-\tilde{F}_0(p)\exp(-\sqrt{p})}{1-\exp(-2\sqrt{p})}). \quad (11)$$

Поскольку обратное преобразование Лапласа от выражения $\frac{1}{\sqrt{p}}\frac{1}{1-\exp(-2\sqrt{p})}$ не является табличным, то воспользуемся разложениями

$$\frac{1}{\sqrt{p}}\frac{1}{1-\exp(-2\sqrt{p})} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{p}}\exp(-2\sqrt{p}k),$$

$$\frac{1}{\sqrt{p}}\frac{\exp(-\sqrt{p})}{1-\exp(-2\sqrt{p})} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{p}}\exp(-(2k+1)\sqrt{p}),$$

и табличными значениями обратного преобразования Лапласа

$$F^{-1}(\frac{\exp(-2k\sqrt{p})}{\sqrt{p}}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\exp(-\frac{(2k)^2}{4t})}{\sqrt{t}},$$

$$F^{-1}(\frac{\exp(-(2k+1)\sqrt{p})}{\sqrt{p}}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\exp(-\frac{(2k+1)^2}{4t})}{\sqrt{t}}.$$

Тогда из (11) получаем

$$g_0(t) = \frac{d^2}{dt^2}\int\limits_0^t[G_0(t-\tau)F_0(\tau)-G_1(t-\tau)F_1(\tau)]d\tau,$$

$$g_1(t) = -\frac{d^2}{dt^2}\int\limits_0^t[G_0(t-\tau)F_1(\tau)-G_1(t-\tau)F_0(\tau)]d\tau,$$

где

$$G_0(t) = F^{-1}(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\exp(-2k\sqrt{p})}{\sqrt{p}}) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(F^{-1}(\frac{\exp(-2k\sqrt{p})}{\sqrt{p}})) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\exp(-\frac{(2k)^2}{4t})}{\sqrt{t}}, \quad (12)$$

$$G_1(t) = F^{-1}(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\exp(-(2k+1)\sqrt{p})}{\sqrt{p}}) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\exp(-\frac{(2k+1)^2}{4t})}{\sqrt{t}}. \quad (13)$$

Для завершения доказательства теоремы, функции $G_0(t)$ и $G_1(t)$ выразим через интегралы от известных функций.

Поскольку $\delta(x-2k\pi), (k = 0,\pm1,\pm2,...)$ - обобщенная функция медленного роста (см. [1], стр. 112), то

$$(\delta(x-2k\pi), \exp(-\frac{x^2}{4\pi^2 t})) = \exp(-\frac{(2k)^2}{4t}).$$

Поэтому справедливы равенства

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}(\delta(x-2k\pi), \exp(-\frac{x^2}{4\pi^2 t})) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\exp(-\frac{(2k)^2}{4t}), \quad (14)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}(\delta(x-(2k+1)\pi), \exp(-\frac{x^2}{4\pi^2 t})) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\exp(-\frac{(2k+1)^2}{4t}). \quad (15)$$

Определим на отрезке $[0,2\pi]$ функцию $\varphi_0(x) = \frac{x}{2}-\frac{x^2}{4\pi}$ и периодически с периодом 2π продолжим на всю ось $(-\infty,\infty)$. Как показано в (см. [1], стр. 113)

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(x-2k\pi)=\frac{d^2}{dx^2}(\varphi_0(x)+\frac{x^2}{4\pi}),$$

где $\frac{d^2}{dx^2}$ понимаем в смысле обобщенных функций.

Отсюда и из равенства (14) заключаем, что

$$\sum_{k=0}^{\infty}\exp(-\frac{(2k)^2}{4t})=\frac{1}{2}(\frac{d^2}{dx^2}(\varphi_0(x)+\frac{x^2}{4\pi}),\exp(-\frac{x^2}{4\pi^2 t}))=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}(\varphi_0(x)+\frac{x^2}{4\pi})\frac{d^2}{dx^2}\exp(-\frac{x^2}{4\pi^2 t})dx.$$

Аналогично, из (15) имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty}\exp(-\frac{(2k+1)^2}{4t})=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}(\varphi_0(x-\pi)+$$

$$+\frac{(x-\pi)^2}{4\pi})\frac{d^2}{dx^2}\exp(-\frac{x^2}{4\pi^2 t})dx.$$

Подставляя полученное в (12) и (13), приходим к формуле (6).

Из (13) имеем что $G_1(t)\in C^{\infty}[0,1]$, а из (12) следует, что $(G_0(t)-\frac{1}{\sqrt{\pi t}})\in C^{\infty}[0,1]$. Так как $f(x,t)\in C^{1+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(\overline{\Omega}),0<\alpha<1$, то $F_0(t),F_1(t)\in C^{1+\frac{\alpha}{2}}(0,T)$. Поэтому не сложно установить, что $g_0(t),g_1(t)\in C^{1+\frac{\alpha}{2}}[0,T]$.

Тем самым представление решения $u(x,t)$ в виде (4) и принадлежность $u(x,t)\in C^{1+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(\overline{\Omega})$ установлены. Теорема доказана полностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Владимиров В.С.* «Уравнения математической физики», Изд-во «Наука», 1998 г.

2. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи для параболических уравнений. Изд-во «Наука», 1973 г.

3. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнение математической физики. Изд-во «Наука», 1980 г.

4. *Диткин В.А., Прудников А.П.* Интегральные преобразования и операторные исчисления. Изд-во «Наука».

References

1. *Vladimirov V.S.* Izdatel'stvo Nauka, **1998** (in Russ.).

2. *Ladyzhenskaia O.A.* Izdatel'stvo Nauka, **1973** (in Russ.).

3. *Tikhonov A.N., Samarskii A.A.* Izdatel'stvo Nauka, **1980** (in Russ.).

4. *Ditkin V.A., Prudnikov A.P.* Izdatel'stvo Nauka (in Russ.).

Резюме

Бір өлшемді жылуөткізгіштік теңдеуі үшін қойылған аралас Коши есебінің арнайы сыртқы көлемдік әлеует арқылы шешімі құрылды.

Summary

The solution of the mixed Cauchy problem for the one-dimensional heat conduction equation is written in quadratures by constructing a special external volume potential.