МАТЕМАТИКА

УДК 517.095

К. А. КАСЫМОВ, Н. САПАР

ЗАДАЧА КОШИ С НАЧАЛЬНЫМ СКАЧКОМ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Рассматривается метод решения задачи Коши с начальным скачком для линейных дифференциальных уравнений третьего порядка. Для решения задачи получены формулы с учетом погранслоя.

Рассмотрим следующее линейное дифференциальное уравнение:

$$L_\varepsilon y(t,\varepsilon) \equiv \varepsilon y''' + \mathrm{A}(t)y'' + \mathrm{B}(t)y' + C(t)y = F(t) \tag{1}$$

с растущими при $\varepsilon \to 0$ начальными условиями при $t = 0$:

$$y(0,\varepsilon) = a_1,\ \ y'(0,\varepsilon) = \frac{\alpha(\varepsilon)}{\varepsilon},\ \ y''(0,\varepsilon) = \frac{\beta(\varepsilon)}{\varepsilon^2}, \tag{2}$$

где $\alpha(\varepsilon)$, $\beta(\varepsilon)$ – регулярно зависящие от ε постоянные вида

$$\alpha(\varepsilon) = \alpha_0 + \varepsilon\alpha_1 + \ldots,\ \ \beta(\varepsilon) = \beta_0 + \varepsilon\beta_1 + \ldots. \tag{3}$$

Решение $y(t,\varepsilon)$ задачи Коши (1), (2) ищем в виде:

$$y(t,\varepsilon) = y_\varepsilon(t) + W_\varepsilon(\tau), \tag{4}$$

$\tau = \dfrac{t}{\varepsilon}$ – погранслойная независимая переменная, $y_\varepsilon(t)$ – регулярная часть решения, определенная на [0,1], $W_\varepsilon(\tau)$ – погранслойная часть решения, определенная при $\tau \geq 0$, и их будем искать в виде:

$$y_\varepsilon(t) = y_0(t) + \varepsilon y_1(t) + \ldots,\ \ W_\varepsilon(\tau) = W_0(\tau) + \varepsilon W_1(\tau) + \ldots. \tag{5}$$

Предварительно умножаем уравнение (1) на ε^2 и подставляем формулу (4) в уравнение (1), а затем приравниваем слева и справа, зависящие t и τ отдельно. Тогда получим два типа уравнения для $y_\varepsilon(t)$ и $W_\varepsilon(\tau)$:

$$\varepsilon y_\varepsilon'''(t) + \mathrm{A}(t)y_\varepsilon''(t) + \mathrm{B}(t)y_\varepsilon'(t) + C(t)y_\varepsilon(t) = F(t), 0 \leq t \leq 1, \tag{6}$$

$$\dddot{W}_\varepsilon(t) + A(\varepsilon\tau)\ddot{W}_\varepsilon(\tau) + \varepsilon\mathrm{B}(\varepsilon\tau)\dot{W}_\varepsilon(\tau) + \varepsilon^2 C(\varepsilon\tau)W_\varepsilon(\tau) = 0, \tau \geq 0. \tag{7}$$

Подставляем (5) соответственно в (6), (7) и разлагаем коэффициенты $\mathrm{A}(\varepsilon\tau)$, $\mathrm{B}(\varepsilon\tau)$, $\mathrm{C}(\varepsilon\tau)$ в ряды по ε, а затем сравниваем коэффициенты при одинаковых степенях ε.

Тогда будем иметь:

$$L_0 y_0(\tau) \equiv A(t)y_0'' + B(t)y_0' + C(t)y_0 = F(t), \tag{8_0}$$

$$L_0 y_k(t) \equiv A(t)y_k'' + B(t)y_k' + C(t)y_k = F_k(t), k \geq 1; \tag{8_k}$$

$$\dddot{W}_0(\tau) + A(0)\ \ddot{W}_0(\tau) = 0, \tag{9_0}$$

$$\dddot{W}_k(\tau) + A(0)\ddot{W}_k(\tau) = G_k(\tau), k \geq 1, \tag{9_k}$$

где

$$F_k(\tau) = -y_{k-1}''(\tau),$$

$$G_k(\tau) = -\left[\sum_{i=1}^{k} \frac{\tau^i}{i!}\mathrm{A}^{(i)}(0)\ddot{W}_{k-1}(\tau) + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\tau^i}{i!}\mathrm{B}^{(i)}(0)\dot{W}_{k-1-i}(\tau) + \sum_{i=0}^{k-2} \frac{\tau^i}{i!}C^{(i)}(0)W_{k-2-1}(\tau)\ \right], k \geq 1. \tag{10_k}$$

Формально подставляем (4) с учетом (5) в начальные условия (2) и сравниваем коэффициенты при одинаковых степенях ε. Тогда получим следующие начальные условия:

$$\ddot{W}_0(0)=\beta_0, \dot{W}_0(0)=\alpha_0, W_0(0)+y_0(0)=a_1,$$

$$\ddot{W}_k(0)+y''_{k-2}(0)=\beta_k, \dot{W}_k(0)+y'_{k-1}(0)=\alpha_k, W_k(0)+y_k(0)=0, k\geq 1. \quad (11)$$

Из (11) видно, что начальные условия недостаточно для однозначного определения коэффициентов $W_k(\tau), y_k(t)$ и, кроме того, они неразделены. Для однозначнего определение коэффициентов $W_k(\tau), y_k(t)$, $k\geq 0$ будем использовать свойства погранслойных функций $W_k(\tau)$ на бесконечность:

$$W_k(\infty)=o, \dot{W}_k(\infty)=o, \ddot{W}_k(\infty)=o, k\geq o. \quad (12)$$

Рассмотрим погранслойное дифференциальное уравнение (9_0) с начальными условиями (11) для $W_0(\tau)$. Интегрируя уравнение (9_0) от 0 до ∞ и учитывая (12), (11), имеем:

$$\ddot{W}_0(\tau)+A(0)\dot{W}_0(0)=0,\ \beta_0+A(0)\alpha_0=0. \quad (13)$$

Теперь интегрируем уравнение (9_0) от 0 до τ. Тогда с учетом (13) получим:

$$\ddot{W}_0(\tau)+A(0)\dot{W}_0(\tau)=0. \quad (14)$$

Интегрируя уравнение (14) от 0 до ∞ и учитывая (12), имеем:

$$\dot{W}_0(0)+A(0)W_0(0)=0.$$

Если учесть (11), то отсюда получим:

$$y_0(0)=a_1+\frac{\alpha_0}{A(0)}. \quad (15)$$

Подставляя (15) в (11), для $y_0(0)$ имеем: $W_0(0)=-\dfrac{\alpha_0}{A(0)}$. Таким образом, начальные условия (11) для дифференциального уравнения $W_0(\tau)$ с учетом (13) имеют вид:

$$\ddot{W}_0(0)=\beta_0,\ \dot{W}_0(0)=\alpha_0=-\frac{\beta_0}{A(0)},\ W_0(0)=-\frac{\alpha_0}{A(0)}=\frac{\beta_0}{A^2(0)} \quad (16)$$

Рассмотрим дифференциальные уравнения (8_0) для $y_0(t)$, (9_1) для $W_1(\tau)$ и их решение с начальными условиями (11):

$$\ddot{W}_1(0)=\beta_1,\ \dot{W}_1(0)+y'_0(0)=\alpha_1,\ W_1(0)+y_1(0)=0, \quad (17)$$

где правая часть $G_1(\tau)$ уравнения (9_1) определяется из формулы (10_1). Для определения недостающих начальных условий интегрируем погранслойные дифференциальные уравнения (9_1) по τ от 0 до ∞:

$$\ddot{W}_1(\infty)+A(0)\dot{W}_1(\infty)-\left[\ddot{W}_1(0)+A(0)\dot{W}_1(0)\right]=\int_0^\infty G_1(s)ds.$$

Отсюда с учетом (12) имеем:

$$\ddot{W}_1(0)+A(0)\dot{W}_1(0)=-\int_0^\infty G_1(s)ds\equiv-\int_0^\tau G_{10}(s)ds,\quad G_{10}(\tau)\equiv G_1(\tau).$$

Теперь интегрируем уравнение (9_1) от 0 до τ и примем (17). Тогда имеем

$$\ddot{W}_1(\tau)+A(0)\dot{W}_1(\tau)=-\int_0^\infty G_{10}(S)dS=\int_0^\tau G_{10}(S)dS.$$

Отсюда получим:

$$\ddot{W}_1(\tau)+A(0)\dot{W}_1(\tau)+\int_0^{\tau}G_{10}(s)ds\equiv G_{11}(\tau). \tag{18}$$

Интегрируем (18) по τ от 0 до ∞. Тогда с учетом (13) имеем:

$$\dot{W}_1(0)+A(0)W_1(0)=-\int_0^{\infty}G_{11}(\tau)d\tau. \tag{19}$$

Если интегрировать (18) от 0 до τ и учесть (19), то получим:

$$\dot{W}_1(\tau)+A(0)W_1(\tau)=-\int_{\tau}^{\infty}G_{11}(S)dS\equiv G_{12}(\tau). \tag{20}$$

Формулы (18), (19) при t=0 с помощью известной формулы

$$\int_0^{\infty}G_{1i}(\tau)d\tau=\frac{(-1)^i}{i!}\int_0^{\infty}\tau^i G_1(\tau)d\tau, i\geq 1 \tag{21}$$

примут следующие виды:

$$\ddot{W}_1(0)+A(0)\dot{W}_1(0)=-\int_0^{\infty}G_{10}(S)dS=-\int_0^{\infty}G_1(S)dS,$$

$$\dot{W}_1(0)+A(0)W_1(0)=-\frac{-1}{1!}\int_0^{\infty}\tau G_1(\tau)d\tau\equiv\int_0^{\infty}\tau G_1(\tau)d\tau.$$

Отсюда найдем:

$$\dot{W}_1(0)=-\frac{1}{A(0)}\left[\ddot{W}_1(0)+\int_0^{\infty}G_1(\tau)d\tau\right],$$

$$W_1(0)=-\frac{1}{A(0)}\left[\dot{W}_1(0)-\int_0^{\infty}\tau G_1(\tau)d\tau\right].$$

Таким образом, первое приближение $W_1(\tau)$, $\tau\geq 0$ погранслойной части $W_\varepsilon(\tau)$ решения определяется из дифференциального уравнения (9_1)с начальными условиями:

$$\ddot{W}_1(0)=\beta_1,(см.(17)),\ \ \dot{W}_1(0)=-\frac{1}{A(0)}\left[\beta_1+\int_0^{\infty}G_1(\tau)d\tau\right],$$

$$W_1(0)=-\frac{1}{A(0)}\left[\frac{1}{A(0)}(\beta_1+\int_0^{\infty}G_1(\tau)d\tau)+\int_0^{\infty}\tau G_1(\tau)d\tau\right]. \tag{22}$$

и нулевое приближение $y_0(\tau)$ регулярной части $y_\varepsilon(\tau)$, $0\leq\tau\leq 1$ решения определяется из уравнения (8_0) с начальными условиями (15) для $y_0(0)$, (17) для $\dot{W}_1(0)$, (22) для $\ddot{W}_1(0)$:

$$y_0(0)=a_1+\frac{\alpha_0}{A(0)}, y_0'(0)=\alpha_1-\dot{W}_1(0)=\alpha_1+\frac{1}{A(0)}\left[\ddot{W}_1(0)+\int_0^{\infty}G_1(\tau)d\tau\right]=\alpha_1+\frac{1}{A(0)}\left[\beta_1+\int_0^{\infty}G_1(\tau)d\tau\right]. \tag{23}$$

Рассмотрим дифференциальные уравнения ($10_к$) для $W_k(\tau)$ и ($9_{к-1}$) для $y_{к-1}(\tau)$ с начальными условиями (12) для $к\geq 2$:

$$\ddot{W}_k(0)+y_{k-2}''(0)=\beta_k, \dot{W}_k(0)+y_{k-1}'(0)=\alpha_k, W_k(0)+y_k(0)=0, k\geq 2, \tag{24}$$

где свободные члены $G_k(\tau)$, $F_{k-1}(\tau)$ определяются формулами ($11_к$). Для определения недостающих начальных условий интегрируем ($10_к$) по t от 0 до ∞. Тогда с учетом (13) имеем:

$$\ddot{W}_k(0)+A(0)\dot{W}_k(0)=-\int_0^\infty G_k(S)dS\equiv-\int_0^\infty G_{k0}(S)dS, G_{k0}(\tau)\equiv G_k(\tau). \tag{25}$$

Интегрируем теперь ($10_к$) от 0 до τ:

$$\dot{W}_k(\tau)+A(0)\dot{W}_k(\tau)-\left[\dot{W}_k(0)+A(0)\dot{W}_k(0)\right]=\int_0^\tau G_k(S)dS\equiv\int_0^\tau G_{k0}(S)dS. \tag{26}$$

Если учесть (25), то из (26) получим:

$$\dot{W}_k(\tau)+A(0)\dot{W}_k(\tau)+\int_0^\infty G_{k0}(S)dS=\int_0^\tau G_{k0}(S)dS.$$

Отсюда имеем:

$$\dot{W}_k(\tau)+A(0)\dot{W}_k(\tau)=-\int_\tau^\infty G_{k0}(S)dS=G_{k1}(\tau). \tag{27}$$

Интегрируем (27) по τ от 0 до ∞. Тогда с учетом условия погранслойности (13) имеем:

$$\dot{W}_k(0)+A(0)W_k(0)=-\int_0^\infty G_{k1}(S)dS. \tag{28}$$

Теперь интегрируем (27) от 0 до τ:

$$\dot{W}_k(\tau)+A(0)W_k(\tau)-\left[\dot{W}_k(0)+A(0)W_k(0)\right]=\int_0^\tau G_{k1}(S)dS.$$

Если учесть (28), то отсюда имеем:

$$\dot{W}_k(\tau)+A(0)W_k(\tau)=-\int_\tau^\infty G_{k1}(S)dS\equiv G_{k2}(\tau). \tag{29}$$

Определим начальные условия для $\overset{(j)}{W}_k(0)$, $j=0,1,2$. С этой целью из формулы (27), (29) при $t=0$ имеем:

$$\ddot{W}_k(0)+A(0)\dot{W}_k(0)=-\int_0^\infty G_{k0}(S)dS,\ \dot{W}_k(0)+A(0)W_k(0)=-\int_0^\infty G_{k1}(S)dS.$$

Отсюда и из (24) имеем начальные условия для $\overset{(j)}{W}_k(0)$, $j=0,1,2$:

$$\ddot{W}_k(0)=\beta_к-y''_{k-2}(0), \dot{W}_k(0)=-\frac{1}{A(0)}\left[\dot{W}_k(0)+\int_0^\infty G_{k0}(S)dS\right],$$

$$W_k(0)=-\frac{1}{A(0)}\left[\dot{W}_k(0)+\int_0^\infty G_{k1}(S)dS\right]$$

или в силу (21), (25) имеем:

$$\ddot{W}_k(0)=\beta_к-y''_{k-2}(0), \dot{W}_k(0)=-\frac{1}{A(0)}\left[\ddot{W}_k(0)+\int_0^\infty G_k(\tau)d\tau\right],$$

$$W_k(0)=-\frac{1}{A(0)}\left[\dot{W}_k(0)-\int_0^\infty \tau G_k(\tau)d\tau\right], к\geq 2. \tag{30}$$

Следовательно, начальные условия $\overset{(j)}{W}_k(0)$, $j=0,1,2$ для дифференциального уравнения ($10_к$) выражаются формулами (30).

Определим теперь начальные условия для $y_{к-1}(0)$, $y'_{к-1}(0)$. С этой целью обратимся к начальным условиям (24). Отсюда найдем:

$$y_{k-1}(0)=W_{k-1}(0),\ y'_{k-1}(0)=\alpha_k-\dot{W}_k(0), \tag{31}$$

где $W_{k-1}(0)$, $\dot{W}_k(0)$ определяются из (30):

$$W_{k-1}(0) = -\frac{1}{A(0)}\left[\dot{W}_{k-1}(0) + \int_0^\infty \tau G_{k-1}(\tau)d\tau\right], \quad \dot{W}_k(0) = -\frac{1}{A(0)}\left[\ddot{W}_k(0) + \int_0^\infty G_k(\tau)d\tau\right]. \quad (32)$$

Следовательно, начальные условия $y_{k-1}(0)$, $y'_{k-1}(0)$ для дифференциального уравнения (9_{k-1}) с учетом (31), (32) имеют вид:

$$y_{k-1}(0) = -\frac{1}{A(0)}\left[\dot{W}_k(0) + \int_0^\infty \tau G_{k-1}(\tau)d\tau\right], \; y'_{k-1}(0) = \alpha_k + \frac{1}{A(0)}\left[\ddot{W}_k(0) + \int_0^\infty G_k(\tau)d\tau\right], \; k \geq 2. \quad (33)$$

и таким образом, начальные условия для погранслойного при $\tau \geq 0$ дифференциального уравнения (9_0) имеет вид (16):

$$\ddot{W}_0(0) = \beta_0, \; \dot{W}_0(0) = -\frac{\beta}{A(0)}, \; W_0(0) = -\frac{\beta_0}{A^2(0)},$$

и для погранслойного при $\tau \geq 0$ дифференциального уравнения (9_1) имеет вид (22):

$$\ddot{W}_1(0) = \beta_1, \; \dot{W}_1(0) = -\frac{1}{A(0)}\left[\beta_1 + \int_0^\infty G_1(\tau)d\tau\right],$$

$$W_1(0) = \frac{1}{A(0)}\left[\frac{1}{A(0)}\left[\beta_1 + \int_0^\infty G_1(\tau)d\tau\right] + \left[\int_0^\infty \tau G_k(\tau)d\tau\right],\right.$$

для нулевого приближения $y_0(t)$ регулярный при $0 \leq t \leq 1$ части решения определяется из дифференциального уравнения (8_0) с начальными условиями (23):

$$y_0(0) = a + \frac{\alpha_0}{A(0)}, \; y'_0(0) = \alpha_1 + \frac{1}{A(0)}\left[\beta_1 + \int_0^\infty G_1(\tau)d\tau\right]$$

для любого приближения $W_k(\tau)$, $k \geq 2$ решения определяется из погранслойного при $\tau \geq 0$ дифференциального уравнения (9_k) с начальными условиями (30):

$$\ddot{W}_k(0) = \beta_k - y''_{k-2}(0), \; \dot{W}_k(0) = -\frac{1}{A(0)}\left[\ddot{W}_k(0) + \int_0^\infty G_k(\tau)d\tau\right],; \; k \geq 2$$

$$W_k(0) = -\frac{1}{A(0)}\left[\dot{W}_k(0) + \int_0^\infty \tau G_k(\tau)d\tau\right], \quad k \geq 2$$

и для любого приближения $y_{k-1}(t), k \geq 2$ регулярный при $0 \leq t \leq 1$ части решения определяется из дифференциального уравнения (9_{k-1}) с начальными условиями (33)

$$y_{k-1}(0) = \frac{1}{A(0)}\left[\dot{W}_{k-1}(0) + \int_0^\infty \tau G_k(\tau)d\tau\right], \; y'_{k-1}(0) = \alpha_k + \frac{1}{A(0)}\left[\ddot{W}_k(0) + \int_0^\infty G_k(\tau)d\tau\right].$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Касымов К.А.* Сингулярно возмущенные краевые задачи с начальными скачками. Алматы: САНАТ, 1997.
2. *Ломов С.А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981.

Резюме

Үшінші ретті дифференциялдық теңдеуге қойылған Коши есебін шешу әдісі қарастырылған.

Summary

The Koshi task with the fist jump for the lineal differential equations of the third order is discussed.

КазНУ им.Аль-Фараби

Поступила 15.06.07г.