УДК 517.946

К.К.КЕНЖЕБАЕВ, Р.У. ЖАХИНА

ОБ УСЛОВИЯХ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НОРМАЛЬНЫХ И НОРМАЛЬНО-РЕГУЛЯРНЫХ РЕШЕНИЙ ДОПУСТИМЫХ СИСТЕМ

Методом Фробениуса-Латышевой устанавливаются условия нахождения нормальных и нормально-регулярных решений одной специальной системы в частных производных.

Постановка задачи. Изучается система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка вида

$$\left(a_{20}^{(0)}\cdot x^2+a_{10}^{(0)}\cdot x+a_{00}^{(0)}\right)\cdot Z_{xx}+$$
$$+\left(a_{11}^{(1)}\cdot xy+a_{10}^{(1)}\cdot x+a_{01}^{(1)}\cdot y+a_{00}^{(1)}\right)\cdot Z_{xy}+$$
$$+\left(a_{10}^{(2)}\cdot x+a_{00}^{(2)}\right)\cdot Z_x+\left(a_{01}^{(3)}\cdot y+a_{00}^{(3)}\right)\cdot Z_y+$$
$$+a_{00}^{(4)}\cdot Z=0,$$
$$\left(b_{02}^{(0)}\cdot y^2+b_{01}^{(0)}\cdot y+b_{00}^{(0)}\right)\cdot Z_{yy}+$$
$$+\left(b_{11}^{(1)}\cdot xy+b_{10}^{(1)}\cdot x+b_{01}^{(1)}\cdot y+b_{00}^{(1)}\right)\cdot Z_{xy}+$$
$$+\left(b_{10}^{(2)}\cdot x+b_{00}^{(2)}\right)\cdot Z_x+\left(b_{01}^{(3)}\cdot y+b_{00}^{(3)}\right)\cdot Z_y+$$
$$+b_{00}^{(4)}\cdot Z=0, \qquad (1)$$

где коэффициенты $a_{kj}^{(i)}$ и $b_{jk}^{(i)}$ (i = 0,1,2,3,4; j = 0,1; k = 0,1,2) произвольные действительные числа, связанные с одним так называемым [1] допустимым дифференциальным уравнением

$$\left(A\cdot x^2+a_{10}\cdot x+a_{00}\right)\cdot Z_{xx}+$$
$$+2\left(A\cdot xy+b_{10}\cdot x+b_{01}\cdot y+b_{00}\right)\cdot Z_{xy}+$$
$$+\left(A\cdot y^2+c_{01}\cdot y+c_{00}\right)\cdot Z_{yy}+\left(B\cdot x+d_{00}\right)\cdot Z_x+$$
$$\left(B\cdot y+g_{00}\right)\cdot Z_y=n\cdot\left(n\cdot A-A+B\right)\cdot Z \qquad (2)$$

с заданными постоянными коэффициентами. Главные коэффициенты A и B в этом уравнений должны быть такими, чтобы при любом неотрицательном m выполнялось условие

$$A\cdot m+B\neq 0, \qquad (3)$$

Целью работы является установление условия существования нормальных и нормально-регулярных решений системы (1), используя метод Фробениуса-Латышевой [2], а также изучение связи между системой (1) и допустимым дифференциальным уравнением (2).

Нормальные и нормально-регулярные решения системы (1). Специальная система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка (1) имеет некоторые особенности:

1. Особые кривые определяются приравниванием к нулю коэффициентов при старших частных производных. Малоизвестно о поведении решений в окрестности точек, где пересекаются более чем две особые кривые или в которых две особые кривые касаются.

2. Система (1) должна удовлетворять условиям совместности [3], и должно выполняться, так называемое, условие интегрируемости.

При выполнений условий интегрируемости система (1) имеет четыре линейно-независимых решений, зависящие от произвольных постоянных.

3. Если все коэффициенты $a_{kj}^{(i)}$ и $b_{jk}^{(i)}$ (i = 0,1,2,3,4; j = 0,1; k = 0,1,2) отличны от нуля, то ранг системы $p\leq 0$.

Если ранг системы (1) $p\leq 0$ и антиранг $m\leq 0$, то соответствующие нормальные и нормально-регулярные решения ищется в виде обобщенных степенных рядов двух переменных по убывающим степеням x и y:

$$Z=x^{\rho}\cdot y^{\sigma}\cdot\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty}A_{\mu,\nu}\cdot x^{-\mu}\cdot y^{-\nu}\quad\left(A_{0,0}\neq 0\right) \qquad (4)$$

и по возрастающим степеням независимых переменных

$$Z=x^{\rho}\cdot y^{\sigma}\cdot\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty}B_{\mu,\nu}\cdot x^{\mu}\cdot y^{\nu}\quad\left(B_{0,0}\neq 0\right). \qquad (5)$$

Согласно методу Фробениуса-Латышевой в (4) и (5) для определения неизвестных постоянных ρ, σ, $A_{\mu,\nu}$, $B_{\mu,\nu}$ $(\mu,\nu = 0,1,2,\ldots)$ следует составить системы характеристических функций исходной системы (1), подставляя вместо $Z(x,y) = x^{\rho}\cdot y^{\sigma}$:

$$Z_1\left[x^{\rho}\cdot y^{\sigma}\right] \equiv x^{\rho-2}\times$$
$$\times y^{\sigma-1}\Big\{\Big[a_{20}^{(0)}\cdot\rho(\rho-1)+a_{11}^{(1)}\cdot\rho\sigma+a_{10}^{(2)}\cdot\rho+$$
$$+a_{01}^{(3)}\cdot\sigma+a_{00}^{(4)}\Big]\cdot x^2y+$$
$$+\Big[a_{10}^{(0)}\cdot\rho(\rho-1)+a_{01}^{(1)}\cdot\rho\sigma+a_{00}^{(2)}\cdot\rho\Big]\cdot xy+$$
$$+a_{00}^{(0)}\cdot\rho(\rho-1)\cdot y+$$
$$+\Big[a_{10}^{(0)}\cdot\rho\sigma+a_{00}^{(3)}\cdot\sigma\Big]\cdot x^2+a_{00}^{(1)}\cdot\rho\sigma\cdot x\Big\};$$
$$Z_2\left[x^{\rho}\cdot y^{\sigma}\right] \equiv x^{\rho-1}\times$$
$$\times y^{\sigma-2}\Big\{\Big[b_{02}^{(0)}\cdot\sigma(\sigma-1)+b_{11}^{(1)}\cdot\rho\sigma+b_{10}^{(2)}\cdot\rho+$$
$$+b_{01}^{(3)}\cdot\sigma+b_{00}^{(4)}\Big]\cdot xy^2+$$
$$+\Big[b_{01}^{(0)}\cdot\sigma(\sigma-1)+b_{10}^{(1)}\cdot\rho\sigma+b_{00}^{(3)}\cdot\sigma\Big]\cdot xy+$$
$$+b_{00}^{(0)}\cdot\sigma(\sigma-1)\cdot x+$$
$$+b_{00}^{(1)}\cdot\rho\sigma\cdot y+\Big[b_{01}^{(1)}\cdot\rho\sigma+b_{00}^{(2)}\cdot\rho\Big]\cdot y^2\Big\}. \quad (6)$$

Неизвестные постоянные ρ и σ определяются из систем определяющих уравнений относительно особенностей (∞,∞) и $(0,0)$, располагающиеся в системах характеристических функций при нулевых или наибольших степенях независимых переменных x и y. Поэтому, для построения нормальных и нормально-регулярных решений системы (1):

Во-первых, должны будем заранее установить при каких значениях коэффициентов $a_{kj}^{(i)}$ и $b_{jk}^{(i)}$ $(i = 0,1,2,3,4;\ j = 0,1;\ k = 0,1,2)$ можно определить системы определяющих уравнений относительно особенностей (∞,∞) и $(0,0)$.

Во-вторых, проверять необходимое условие существования решений вида (4) и (5) и из них найти значения неизвестных постоянных ρ и σ.

Это неизвестные определяются из системы определяющих уравнений относительно особенности (∞,∞) и исходная система (1) имеет только нормальные решения вида (4). Система определяющих уравнений определяет до четырёх пар корней $(\rho_i,\ \sigma_i)$ $(i = 1,2,3,4)$. В свою очередь это способствует определению четырёх линейно-независимых решений вида (4).

Выполнение условий

$$\begin{cases} f_{20}^{(1)}(\rho,\sigma)=0, \\ f_{02}^{(2)}(\rho,\sigma)=0 \end{cases}$$

является необходимым условием существования решения вида (4).

В рассмотренном случае, особые кривые системы регулярные и построенные решения также будут регулярными. Неизвестные коэффициенты $A_{\mu,\nu}$ $(\mu,\nu = 0,1,2,\ldots)$ определяются из рекуррентных систем уравнений.

Если ранг $p > 0$, то возможно существования решений в виде нормальных рядов Томе двух переменных

$$Z = \exp Q(x,y)\cdot x^{\rho}\cdot y^{\sigma}\cdot\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty}A_{\mu,\nu}\cdot x^{-\mu}\cdot y^{-\nu}$$
$$\left(A_{0,0}\neq 0\right) \quad (7)$$

и нормально-регулярных решений

$$Z = \exp Q(x,y)\cdot x^{\rho}\cdot y^{\sigma}\cdot\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty}B_{\mu,\nu}\cdot x^{\mu}\cdot y^{\nu}$$
$$\left(B_{0,0}\neq 0\right), \quad (8)$$
$$Q(x,y)= \quad (9)$$
$$=\frac{\alpha_{p0}}{p}\cdot x^{p}+\frac{\alpha_{0p}}{p}\cdot y^{p}+\ldots+\alpha_{11}\cdot xy+\alpha_{01}\cdot y+\alpha_{10}\cdot x$$

с неизвестными постоянными ρ, σ, $A_{\mu,\nu}$, $B_{\mu,\nu}$ $(\mu,\nu = 0,1,2,\ldots)$, α_{p0}, α_{0p}, ..., α_{11}, α_{01}, α_{10} – которые следует определить. Ранг p определяет степень многочлена двух переменных $Q(x, y)$ и этот многочлен является общим для решений (7) и (8).

Нормально-регулярные решения обычно связывают с особенностью в (0, 0). Определим при каких значениях коэффициентов система (1) имеет нормально-регулярные решения.

Наиболее простой случай имеем при $a_{00}^{(0)} = 0$, $b_{00}^{(0)} = 0$. Тогда система определяю-

щих уравнений относительно особенности (0,0) запишется в виде

$$\begin{cases} f_{00}^{(1)}(\rho,\sigma) \equiv \rho\cdot\sigma = 0, \\ f_{00}^{(2)}(\rho,\sigma) \equiv \rho\cdot\sigma = 0. \end{cases} \quad (10)$$

и определяется одно решение в виде простого степенного ряда двух переменных

$$Z = \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} A_{\mu,\nu}\cdot x^{\mu}\cdot y^{\nu} \qquad \left(A_{0,0}\neq 0\right) \quad (11)$$

Этот случай интересен тем, что одновременно можно определить и систему определяющих уравнений относительно особенности (∞,∞).

Как подчеркнули выше, такая система имеет до четырёх пар корней $(\rho_i,\ \sigma_i)$ $(i=1,2,3,4)$. Поэтому, система (1) при $a_{00}^{(0)}=0$ и $b_{00}^{(0)}=0$ имеет четыре линейно-независимых нормальных решений вида (4).

Пример 1. Следующая система является частным случаем системы (1):

$$x\cdot(1+x)\cdot Z_{xx} - y\cdot(1+x)\cdot Z_{xy} +$$
$$+\left[1-\beta+\left(\alpha+\beta'+1\right)\cdot x\right]\cdot Z_x - \alpha\cdot y\cdot Z_y + \alpha\cdot\beta'\cdot Z = 0,$$
$$y\cdot(1+y)\cdot Z_{yy} - x\cdot(1+y)\cdot Z_{xy} + \quad (12)$$
$$+\left[1-\beta'+\left(\alpha'+\beta+1\right)\cdot y\right]\cdot Z_x - \alpha'\cdot x\cdot Z_y + \alpha'\cdot\beta\cdot Z = 0.$$

Эта известная система Горна (G_2). Составляя систему характеристических функций убеждаемся, что ее система определяющих уравнений относительно особенности (0,0) имеет три пары корней: $(\rho_1=0,\ \sigma_1=0)$, $(\rho_1=0,\ \sigma_2=\beta')$ и $(\rho_2=\beta,\ \sigma_1=0)$.

В этом случае, существует только единственное решение

$$G_2(\alpha,\alpha',\beta,\beta';x,y) =$$
$$= \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_m\cdot(\alpha')_n\cdot(\beta)_{n-m}\cdot(\beta')_{m-n}}{m!n!}\cdot x^m\cdot y^n, \quad (13)$$

соответствующее показателю $(\rho_1=0,\ \sigma_1=0)$.

Изученные системы имеют связь с одним допустимым дифференциальным уравнением.

Теорема 1. Основное уравнение

$$a\cdot Z_{xx} + 2b\cdot Z_{xy} + c\cdot Z_{yy} + d\cdot Z_x + g\cdot Z_y = \lambda\cdot u, \quad (14)$$

(a, b, c, d, g – многочлены) допустимо тогда, когда оно имеет вид (2), где коэффициенты $a_{kn}, b_{kn}, c_{kn}, d_{00}, g_{00}$ произвольные фиксированные действительные числа, а числа A и B таковы, что при любом целом неотрицательном p выполняется условие (3) [1].

Определение 1. Совместная система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка (1) называется допустимой системой, если сумма двух её уравнений удовлетворяет условиям теоремы (1).

Различные свойства допустимого уравнения и их решений приводятся в [1]. Теория допустимых уравнений были построены рядом известных математиков, такие как Г. Кролл, И. Шеффер, Г.К. Энгелис, Т.Корвиндер, Д.Джексон, П.К.Суетин и др. [1]. Решения их связаны с ортогональными многочленами двух переменных. Однако, они изучены значительно меньше, чем по сравнению с ортогональными многочленами одной переменной. Как убедились выше решениями частных случаев системы (1) являются и специальные функций двух переменных, где также много нерешенных проблем.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Суетин П.К.* Ортогональные многочлены по двум переменным. М.: Наука, 1988. 384 с.

2. *Тасмамбетов Ж.Н.* Построение решения системы дифференциальных уравнений в частных производных с регулярной особенностью обобщенным методом Фробениуса-Латышевой. (Препр./АН УССР. Институт математики; 91.29). Киев, 1991. 44 с.

3. *Wilczynski E.J.* Projective differential geometry of curves and ruled sup faces. Leipzig: Feubner, 1906. 120 p.

Резюме

Фробениус-Латышева әдісімен дербес туындылы бір арнайы жүйенің қалыпты және қалыпты-регуляр шешімдерін анықтау шарттары орнатылған.

Summary

By Frobenius-Latysheva's method the condition finding of normal-regular solutions of the special system in partial derivative is established

Актюбинский государственный университет им. К. Жубанова

Поступила 22.07.10г.