УДК 517.956

А.К. КЕРЕЕВ

ЗАДАЧА ДАРБУ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ВЫРОЖДЕНИЕМ ТИПА И ПОРЯДКА

В работе доказана корректность задачи Дарбу для многомерных гиперболических уравнений с вырождением типа и порядка.

Рассмотрим на полупространстве t >0 уравнения четного порядка

$$L^s u \equiv (t^p \Delta_x - t^q \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \sum_{i=1}^{m} a_i(x,t)\frac{\partial}{\partial x_i} +$$

$$+ b(x,t)\frac{\partial}{\partial t} + c(x,t))^s u = 0, \qquad (1)$$

где p,q=const>0, $p \geq q$, $x = (x_1,...,x_m), m \geq 2, \Delta_x$ - оператор Лапласа по переменным $x_1,...,x_m$, 1< s – целое число, на важность исследования которых обратил внимание еще А.В.Бицадзе [1,2].

Уравнение (1) гиперболично при t >0, а вдоль плоскости t=0 имеют место вырождения его типа и порядка.

Обозначим через D_0 - конечную область евклидова пространства E_{m+1} точек ($x_1,...,x_m,t$), ограниченную поверхностями $|x| = \frac{2}{p-q+2} t^{(p-q+2)/2}$, $|x| = 1 - \frac{2}{p-q+2} t^{(p-q+2)/2}$ и плоскостью t =0, где $|x|$ -длина вектора x, $0 \leq t \leq \left(\frac{(p-q+2)}{4}\right)^{\frac{2}{p-q+2}}$.

Части этих поверхностей, образующих границу ∂D_0 области D_0, обозначим через S_0, S_1 и S соответственно.

Рассмотрим многомерный аналог задачи Дарбу для уравнения (1) ([3]).

Задача 1. Найти в области D_0 решение уравнения (1) из класса $C^{2s-1}(\overline{D}_0) \cap C^{2s}(D_0)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$L^j u\big|_S = \tau_j(x), \quad L^j u\big|_{S_1} = \varphi_j(x), \quad j = \overline{0, s-1}, \qquad (2)$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t} L^j u\big|_S = \nu_j(x), \quad L^j u\big|_{S_1} = \varphi_j(x), \quad j = \overline{0, s-1}. \qquad (3)$$

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x = (x_1,...,x_m,t)$ к сферическим $r, \theta_1,...,\theta_{m-1}, r \geq 0, 0 \leq \theta_1 < 2\pi, 0 < \theta_i < \pi, i = 2,...,m-1$, сохранив обозначения, использованные в [4].

Пусть $\{Y_{n,m}^k(\theta)\}$ - система линейно независимых сферических функций порядка $n, 1 \leq k \leq k_n, (m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2)$, $\theta = (\theta_1,...,\theta_{m-1}), W_2^l(S), l = 0,1,...$ - пространства Соболева, а $\widetilde{S} = \left\{(r,\theta) \in S, 0 < r < \frac{1}{2}\right\}$. Через $\widetilde{a}_{in}^k(r,t), a_{in}^k(r,t), \widetilde{b}_n^k(r,t)$, $\widetilde{c}_n^k(r,t), \rho_n^k, \overline{\tau}_{jn}^k(r,t), \overline{\varphi}_{jn}^k(r,t)$ обозначим коэффициенты разложения по сферическим функциям $\{Y_{n,m}^k(\theta)\}$ соответственно функций

$$a_i(r,\theta,t)\rho(\theta), a_i \frac{x_i}{r}\rho, b(r,\theta,t)\rho, c(r,\theta,t)\rho,$$

$$\rho(\theta), \tau_j(r,\theta), \varphi_j(r,\theta), \ i = 1,...,m, j = \overline{0, s-1}.$$

Пусть

$$\overline{a}_i(x,t) = t^{-q} a_i, \quad \overline{b}(x,t) = t^{-q} b, \quad \overline{c}(x,t) = t^{-q} c$$

и $\overline{a}_i(x,t), \overline{b}(x,t), \overline{c}(x,t) \in W_2^l(D_0) \cap C^{2s-1}(\overline{D}_0)$,

$i = 1,...,m, l \geq m+1.$

Тогда имеет место

Теорема 1. Если

$$\tau_j(r,\theta)=r^4\tau_j^*(r,\theta),\nu_j(r,\theta)=r^4\nu_j^*(r,\theta),\varphi_j(r,\theta)=$$

$$=\left(r-\frac{1}{2}\right)^{(m+5)/2}\varphi_j^*(r,\theta),\tau_j^*(r,\theta),\nu_j^*(r,\theta)\in W_2^l(S),$$

$$\varphi_j^*(r,\theta)\in W_2^l(S\setminus\widetilde{S}),\ j=\overline{0,s-1},l>(3s+3m)/2\quad,$$

то задача 1 однозначно разрешима.

Докажем теорему 1 индукцией по s.

Пусть s=2. Если ввести новую неизвестную функцию $\vartheta(x,t)=Lu$, то задача 1 распадается на две следующие задачи.

Задача 2. Найти в области D_0 решение уравнения $L\vartheta=0$, удовлетворяющее краевым условиям

$$\vartheta\big|_S=\tau_1(x),\quad \vartheta\big|_{S_1}=\varphi_1(x),$$

или

$$\vartheta_t\big|_S=\nu_1(x),\quad \vartheta\big|_{S_1}=\varphi_1(x).$$

Задача 3. Найти в области D_0 решение уравнения

$$Lu=\vartheta(x,t),\tag{4}$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$u\big|_S=\tau_0(x),\quad u\big|_{S_1}=\varphi_0(x),\tag{5}$$

или

$$u_t\big|_S=\nu_0(x),\quad u\big|_{S_1}=\varphi_0(x).\tag{6}$$

В работе [5] показано, что задача 2 имеет единственное решение, которое имеет вид

$$\vartheta(r,\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\overline{\vartheta}_n^k(r,t)Y_{n,m}^k(\theta)\quad,\tag{7}$$

где функции $\overline{\vartheta}_n^k(r,t)$ находятся из двумерных задач Дарбу.

Теперь будем доказывать теорему 1. Сначала докажем единственность решения задачи 1. Пусть $\tau_j(x)\equiv 0,\nu_j(x)\equiv 0,\varphi_j(x)\equiv 0,\ j=0,1$. Тогда из [6] вытекает, что решение задачи 2 $\vartheta(x,t)\equiv 0$. Откуда следует также,что решение задачи 3 $u(x,t)\equiv 0$.

Теперь переходим к разрешимости задачи 1. Сначала рассмотрим задачу (1),(2) и для её решения достаточно решить задачу (4),(5), где $\vartheta(x,t)$ определяется из (7).

Решение $u(r,\theta,t)$ ищем в виде ряда

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\overline{u}_n^k(r,t)Y_{n,m}^k(\theta),\tag{8}$$

где функции $\overline{u}_n^k(r,t)$ – функции, которые будут определены ниже.

Тогда, аналогично, как в [4-6], с учётом (7) для $\overline{u}_n^k(r,t)$ получим ряд

$$\begin{aligned}&t^p\rho_0^1\overline{u}_{0rr}^1-t^q\rho_0^1\overline{u}_{0tt}^1+\left(\frac{m-1}{r}t^p\rho_0^1+\sum_{i=1}^{m}a_{i0}^1\right)\overline{u}_{0r}^1+\\&+\widetilde{b}_0^1\overline{u}_{0t}^1+\widetilde{c}_0^1\overline{u}_0^1-\rho_0^1\overline{\vartheta}_0^1+\\&+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\Big\{t^p\rho_n^k\overline{u}_{nrr}^k-t^q\rho_n^k\overline{u}_{ntt}^k+\\&+\left(\frac{m-1}{r}t^p\rho_n^k+\sum_{i=1}^{m}a_{in}^k\right)\overline{u}_{nr}^k+\widetilde{b}_n^k\overline{u}_{nt}^k+\\&+\left[\widetilde{c}_n^k-\frac{\lambda_n t^p\rho_n^k}{r^2}+\sum_{i=1}^{m}\left(\widetilde{a}_{in-1}^k-na_{in}^k\right)\right]\overline{u}_n^k-\\&-\rho_n^k\overline{\vartheta}_n^k\Big\}=0,\quad \lambda_n=n(n+m-2).\end{aligned}\tag{9}$$

Теперь рассмотрим бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$t^p\rho_0^1\overline{u}_{0rr}^1-t^q\rho_0^1\overline{u}_{0tt}^1+\frac{m-1}{r}t^p\rho_0^1\overline{u}_{0r}^1=\rho_0^1\overline{\vartheta}_0^1,\tag{10}$$

$$\begin{aligned}&t^p\rho_1^k\overline{u}_{1rr}^k-t^q\rho_1^k\overline{u}_{1tt}^k+\frac{m-1}{r}t^p\rho_1^k\overline{u}_{1r}^k-\\&-\frac{\lambda_1}{r^2}t^p\rho_1^k\overline{u}_1^k=\rho_1^k\overline{\vartheta}_1^k-\\&-\frac{1}{k_1}\left(\sum_{i=0}^{m}a_{i0}^1\overline{u}_{0r}^1+\widetilde{b}_0^1\overline{u}_{0t}^1+\widetilde{c}_0^1\overline{u}_0^1\right),\\&n=1,k=\overline{1,k_1},\end{aligned}\tag{11}$$

$$\begin{aligned}&t^p\rho_n^k\overline{u}_{nrr}^k-t^q\rho_n^k\overline{u}_{ntt}^k+\frac{m-1}{r}t^p\rho_n^k\overline{u}_{nr}^k-\\&-\frac{\lambda_n}{r^2}t^p\rho_n^k\overline{u}_n^k=\rho_n^k\overline{\vartheta}_n^k-\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{k_n}\sum_{k=1}^{k_{n-1}}\left\{\sum_{i=1}^{m}a_{in-1}^k\overline{u}_{n-1r}^k+\widetilde{b}_{n-1}^1\overline{u}_{n-1t}^k+\right.$$

$$\left.+\left[\widetilde{c}_{n-1}^k+\sum_{i=1}^{m}(\widetilde{a}_{in-2}^k-(n-1)a_{in-1}^k)\right]\overline{u}_{n-1}^k\right\},$$

$$k=\overline{1,k_n},n=2,3,.... \tag{12}$$

Далее, из краевого условия (5), в силу (8), будем иметь

$$\overline{u}_n^k(r,0)=\overline{\tau}_{0n}^k(r),\overline{u}_n^k\left[r,\left(\frac{(2+p-q)(1-r)}{2}\right)^{\frac{2}{2+p-q}}\right]=$$

$$=\overline{\varphi}_{0n}^k(r),\ k=\overline{1,k_n},\ n=0,1,.... \tag{13}$$

Нетрудно показать, что если $\{\overline{u}_n^k\}$, $k=\overline{1,k_n},n=0,1,...$ – решение системы (10)–(12), то оно является и решением уравнения (9).

Таким образом, задача (4),(5) сведена к системе задач Дарбу для уравнений (10) – (12). Теперь будем искать решение этих задач.

Нетрудно заметить, что каждое уравнение системы (10) – (12) можно представить в виде

$$t^l\overline{u}_{nrr}^k-\overline{u}_{ntt}^k+\frac{m-1}{r}t^l\overline{u}_{nr}^k-\frac{\lambda_n}{r^2}t^l\overline{u}_n^k=t^{-q}(\overline{\vartheta}_n^k+\overline{f}_n^k(r,t)),$$

$$l=p-q\geq 0 \tag{14}$$

где $\overline{f}_n^k(r,t)$ определяются из предыдущих уравнений этой системы, при этом $\overline{f}_0^1(r,t)\equiv 0$.

В (14), проведя замену переменных $\overline{u}_n^k(r,t)=r^{(1-m)/2}u_n^k(r,t)$ и положив затем $r=r,x_0=\frac{2}{2+l}t^{(2+l)/2}$, получим уравнение

$$L_\alpha u_{\alpha,n}^k\equiv u_{\alpha,nrr}^k-u_{\alpha,nx_0x_0}^k-\frac{\alpha}{x_0}u_{\alpha,nx_0}^k+$$

$$+\frac{[(m-1)(3-m)-4\lambda_n]}{4r^2}u_{\alpha,n}^k=f_{\alpha,n}^k(r,x_0), \tag{15}$$

$$0\leq\alpha=\frac{l}{2+l}<1,f_{\alpha,n}^k(r,x_0)=$$

$$=r^{(m-1)/2}\left(\frac{x_0}{1-\alpha}\right)^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}q-2\alpha}\left\{\overline{\vartheta}_n^k\left[r,\left(\frac{x_0}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}\right]+\right.$$

$$\left.\overline{f}_n^k\left[r,\left(\frac{x_0}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}\right]\right\}.$$

При этом краевое условие (13) запишется в виде

$$u_{\alpha,n}^k(r,0)=\tau_{0n}^k(r),0\leq r\leq 1,u_{\alpha,n}^k(r,1-r)=,$$

$$=\varphi_{0n}^k(r),\frac{1}{2}\leq r\leq 1 \tag{16}$$

$$\tau_{0n}^k(r)=r^{(m-1)/2}\overline{\tau}_{0n}^k(r),\varphi_{0n}^k(r)=r^{(m-1)/2}\overline{\varphi}_{0n}^k(r),.$$

$$k=\overline{1,k_n},n=0,1,...$$

В [7,8] показано, что задача (15), (16) имеет единственное решение.

Следовательно, сначала решив задачу (10), (13), а затем (11), (13) и т.д., найдем последовательно все $\overline{u}_n^k(r,t),\ k=\overline{1,k_n},\ n=0,1,...$.

Таким образом, задача (4),(5) имеет решение вида

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}r^{(1-m)/2}u_n^k(r,t)Y_{n,m}^k(\theta), \tag{17}$$

где $u_n^k(r,t)$ определяются из задачи (15),(16).

Как и в [4,8], нетрудно показать, что полученное решение вида (17) принадлежит искомому классу.

Используя результаты [5-8], можно доказать, что задача (4),(6) (т.е.задача (1),(3)) также имеет решение вида (17).

Теорема 1 при n=2 доказана.

Пусть теперь теорема 1 верна при n=к. Докажем ее при n=к+1. В этом случае задачу 1 можно разбить на две следующие задачи.

Задача 4. Найти в области D_0 решение уравнения $L^k\vartheta=0$, удовлетворяющее краевым условиям

$$L^j\vartheta\big|_S=\tau_{j+1}(x),\quad L^j\vartheta\big|_{S_1}=\varphi_{j+1}(x),\quad j=\overline{0,k-1},$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t}L^j\vartheta\big|_S=\nu_{j+1}(x),\quad L^j\vartheta\big|_{S_1}=\varphi_{j+1}(x),\quad j=\overline{0,k-1}.$$

Задача 5. Найти в области D_0 решение

уравнения (4), удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_S = \tau_0(x), \quad u|_{S_1} = \varphi_0(x),$$

или

$$u_t|_S = \nu_0(x), \quad u|_{S_1} = \varphi_0(x).$$

По предположению, при n=к задача 4 имеет единственное решение $\vartheta(r,\theta,t)$, которое можно представить в виде (7).

Далее, как показано ранее, задача 5 однозначно разрешима, при этом $\vartheta(r,\theta,t)$ определяется из (7).

Теорема 1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бицадзе А.В.* Уравнения смешанного типа. М.:Изд-во АН СССР, 1959.162с.

2. *Бицадзе А.В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М.:Наука. 1981.448с.

3. *Protter M.H.* New voundary problems for the wave equation and equations of mixed type //J.Rational Mech. and Analysis.1954.v.3,№ 4.p.435-446

4. *Алдашев С.А.* Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений.Алматы: Гылым, 1994. 170с.

5. *Ермекбаев Е.Ж.* Критерий однозначной разрешимости задачи Дарбу-Проттера для многомерного гиперболического уравнения с вырождением типа и порядка //Тезисы 5 межд. конференции по математическому моделированию. Якутск:ЯГУ,2007,с.

6. *Алдашев С.А., Ермекбаев Е.Ж.* Критерий единственности решения задачи Дарбу-Проттера для многомерного гиперболического уравнения с вырождением типа и порядка //Вестник КазНПУ им.Абая,сер.физ.-мат. науки,2006 №1(15),с.10-17

7. *Алдашев С.А.* Критерий существования собственных функций спектральной задачи Дарбу-Проттера для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений // Дифференциальные уравнения.2005. №6,с.795-801

8. *Алдашев С.А.* Вырождающиеся многомерные гиперболические уравнения.Орал,2007.139с.

Резюме

Мақалада түрі мен дәрежесі азғындалған жұп дәрежелі гиперболалық теңдеулерге Дарбу есебінің шешімінің бар және жалғыздығы дәлелденген.

Summary

The correcthess of Darboux tasf for multidimensional degerate of type and order of hyperbolik equations of the even order are proved in the work.

Актюбинский государственный университет им. К.Жубанова г.Актюбинск

Поступила 09.04.2008 г.