

Научные статьи и обзоры

УДК 531(075.8)

X. КОЖАМУРАТОВ

ДОПОЛНИТЕЛЬНОЕ УГЛОВОЕ УСКОРЕНИЕ ТЕЛА В СФЕРИЧЕСКОМ ДВИЖЕНИИ

Алматинский гуманитарно-технический университет

(Представлена академиком НАН РК М. Журиновым)

Аналитически доказано, что в движении твердого тела с одной неподвижной точкой, кроме угловых ускорений прецессии, нутации и собственного вращения, возникает дополнительное угловое ускорение, обусловленное взаимовлиянием трех (или двух) составляющих вращательных движений. Учет дополнительного углового ускорения в расчетах движений планет и их спутников и летательных, и самоходных аппаратов необходим для управления их движением.

Дифференциальные уравнения сферического движения твердого тела относительно подвижных главных осей X, Y, Z его инерции (жестко связанных с ним) хорошо известны [1]:

$$\begin{cases} I_x \frac{d\omega_x}{dt} + \omega_y \omega_z (I_z - I_y) = M_x^e; \\ I_y \frac{d\omega_y}{dt} + \omega_z \omega_x (I_x - I_z) = M_y^e; \\ I_z \frac{d\omega_z}{dt} + \omega_x \omega_y (I_y - I_x) = M_z^e; \end{cases} \quad (1)$$

где I_x, I_y, I_z – моменты инерции тела относительно его главных осей инерции X, Y, Z в неподвижной точке O, M_x^e, M_y^e, M_z^e – проекции вектора главного момента внешних сил, приложенных к телу, относительно подвижных осей координат X, Y, Z, жестко связанных с телом, на эти оси, $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ – проекции вектора угловой скорости $\bar{\omega}$ тела на оси X, Y, Z. Эти проекции определяются по кинематическим уравнениям Эйлера [2]:

$$\begin{cases} \omega_x = \omega_\psi \sin \theta \sin \phi + \omega_\theta \cos \phi, \\ \omega_y = \omega_\psi \sin \theta \cos \phi - \omega_\theta \sin \phi, \\ \omega_z = \omega_\psi \cos \theta + \omega_\phi, \end{cases} \quad (2)$$

где ϕ, θ, ψ – углы Эйлера, $\bar{\omega}_\phi, \bar{\omega}_\theta, \bar{\omega}_\psi$ – угловые скорости, соответственно, прецессии, нутации и собственного вращения, определяемые как первые производные углов Эйлера по времени.

Из динамических уравнений (1) Эйлера видно, что на динамику сферического движения тела влияют проекции вектора его угловой скорости на оси координат и производные этих проекций по времени, наряду с моментом внешних сил и характером распределения массы тела. Так как проекции вектора угловой скорости тела определяются из кинематических уравнений (2) Эйлера, то производные по времени от проекций вектора угловой скорости тела на координатные оси

зависят от угловых ускорений прецессии, нутации и собственного вращения и от углов Эйлера и от их синусов и косинусов.

Так как в сферическом движении твердое тело участвует одновременно в трех вращениях, то по идеи Кориолиса, при вращательном переносном движении должны возникать дополнительные линейные ускорения точек тела, обуславливающие возникновение дополнительного углового его ускорения. Для проверки полезности этой гипотезы необходимо исследовать основные компоненты вектора углового ускорения тела в сферическом движении, определяемого как производная вектора его угловой скорости по времени:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{\omega}_\phi + \bar{\omega}_\theta + \bar{\omega}_\varphi) = \frac{d}{dt}(\dot{\phi}\bar{k}_1 + \dot{\theta}\bar{k}_2 + \dot{\varphi}\bar{k}), \quad (3)$$

где $\bar{\varepsilon}$ – вектор углового ускорения тела, $\bar{\omega}$ – вектор угловой скорости тела, $\bar{\omega}_\phi, \bar{\omega}_\theta, \bar{\omega}_\varphi$ – векторы угловых скоростей, соответственно, прецессии, нутации и собственного вращения тела, $\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}$ – первые производные углов Эйлера по времени, \bar{k} – орт подвижной оси координат OZ, жестко связанной с телом, \bar{k}_1 – орт неподвижной оси координат OZ₁, \bar{k}_2 – единичный вектор линии узлов.

Определим производную по времени от векторной суммы (3):

$$\bar{\varepsilon} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} = (\ddot{\phi}\bar{k}_1 + \dot{\phi}\frac{d\bar{k}_1}{dt}) + (\dot{\theta}\bar{k}_2 + \dot{\theta}\frac{d\bar{k}_1}{dt}) + (\ddot{\varphi}\bar{k} + \dot{\varphi}\frac{d\bar{k}}{dt}), \quad (4)$$

где $\ddot{\phi}, \ddot{\theta}, \ddot{\varphi}$ – алгебраические значения вторых производных углов Эйлера по времени. При этом

$$\bar{k}_1 = Const, \quad \dot{\theta}\bar{k}_2 = \bar{\varepsilon}_\theta, \quad \ddot{\phi}\bar{k} = \bar{\varepsilon}_\varphi, \quad \dot{\phi}\bar{k}_1 = \bar{\varepsilon}_\phi, \quad \frac{d\bar{k}_1}{dt} = 0, \quad \frac{d\bar{k}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{k}, \quad \bar{\omega} = \bar{\omega}_\phi + \bar{\omega}_\theta + \bar{\omega}_\varphi, \quad \frac{d\bar{k}_2}{dt} = \bar{\omega}_\phi \times \bar{k}_2,$$

где $\bar{\varepsilon}_\phi, \bar{\varepsilon}_\theta, \bar{\varepsilon}_\varphi$ – векторы угловых ускорений, соответственно, прецессии, нутации и собственного вращения, $\bar{\omega}$ – вектор мгновенной угловой скорости тела.

Тогда вектор углового ускорения (4) тела в сферическом движении с использованием вышеприведенных величин приводится к виду:

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_\phi + \bar{\varepsilon}_\theta + \bar{\varepsilon}_\varphi + (\bar{\omega}_\phi \times \bar{\omega}_\theta) + (\bar{\omega}_\phi \times \bar{\omega}_\varphi) + (\bar{\omega}_\theta \times \bar{\omega}_\varphi), \quad (5)$$

где три последних слагаемых (в виде векторного произведения) измеряется в радианах в секунду в квадрате.

Следовательно, вектор углового ускорения твердого тела с одной неподвижной точкой состоит из четырех компонентов, три из которых представляет собой вектора углового ускорения, возникающего из-за изменения вектора угловой скорости только прецессии, или только нутации, или только собственного вращения тела. Четвертый компонент в виде суммы трех векторных произведений возникает из-за взаимовлияния двух векторов угловых скоростей прецессии и нутации, или угловых скоростей прецессии и собственного вращения, или угловых скоростей нутации и собственного вращения тела.

Первых трех компонентов вектора углового ускорения тела с одной неподвижной точкой обычно называют угловыми ускорениями, соответственно, прецессии, нутации и собственного вращения, так как они направлены по одной прямой с соответствующими векторами угловых скоростей тела и характеризуют скорость изменения угловой скорости одноименного вращения без учета остальных двух вращений.

Четвертого компонента вектора углового ускорения тела с одной неподвижной точкой уместно называть вектором дополнительного углового ускорения тела в сферическом движении, так как он возникает из-за взаимовлияний трех (или двух) одновременных вращательных движений одного тела. Если отсутствует собственное вращение, то дополнительное угловое ускорение зависит от угловых скоростей прецессии и нутации. При отсутствии прецессии, дополнительное угловое ускорение зависит от угловых скоростей нутации и собственного вращения. При отсутствии нутации дополнительное угловое ускорение зависит от угловых скоростей прецессии и собственного вращения.

Данное исследование компонентов вектора углового ускорения тела в сферическом движении показывает, что в дифференциальных уравнениях сферического движения тела, известных на протяжении нескольких веков и применяемых для изучения движений планет и их спутников, а также для управления движениями летательных и самоходных аппаратов, не указано наличие дополнительного углового его ускорения.

Таким образом, вектор дополнительного углового ускорения твердого тела с одной неподвижной точкой равен сумме векторных произведений угловой скорости прецессии на векторы угловых скоростей нутации и собственного вращения и угловых скоростей нутации и собственного вращения:

$$\bar{\varepsilon}_\Delta = (\bar{\omega}_\phi \times \bar{\omega}_\theta) + (\bar{\omega}_\phi \times \bar{\omega}_\varphi) + (\bar{\omega}_\theta \times \bar{\omega}_\varphi), \quad (6)$$

где $\bar{\varepsilon}_\Delta$ – вектор дополнительного углового ускорения тела в сферическом движении, $\bar{\omega}_\phi, \bar{\omega}_\theta, \bar{\omega}_\varphi$ – векторы угловых скоростей прецессии, нутации и собственного вращения тела.

В отличие от дополнительного линейного ускорения точки в сложном движении, определяемого как одно удвоенное векторное произведение вектора угловой скорости переносного вращения на вектор относительной ее скорости, вектор дополнительного углового ускорения тела определяется как сумма трех (или двух) векторных произведений угловых скоростей взаимовлияющих вращений. Тем не менее, идея Кориолиса, также как уравнения Эйлера, послужила основанием для выявления наличия дополнительного углового ускорения тела в сферическом движении тела.

По славной традиции развитых стран отдать должное автору общественно полезного исследования, в Казахстане сумеют оценить заслуги автора дополнительного углового ускорения тела в сферическом движении.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Яблонский А.А. Курс теоретической механики. – Ч. 2. – М.: Высшая школа, 1977. – 244 с.
- 2 Бухольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. – Ч. 2. – М.: Наука, 1969. – 164 с.

REFERENCES

1. Jablonskij A.A.. *Kurs teoreticheskoy mehaniki*. 2, Moscow, Vysshaja shkola, 1977, p. 244 (in Russ.).
2. Buhgol'c N.N.. *Osnovnoj kurs teoreticheskoy mehaniki*. 2, Moscow, Nauka, 1969, p. 164 (in Russ.).

X. Қожамұратов

СФЕРАЛЫҚ ҚОЗҒАЛЫСТАҒЫ ДЕНЕҢІҢ ҚОСЫМША БҮРҮШТҮҚ ҮДЕУЛЕРИ

Бір нүктесі қозғалмайтын қатты дененің қозғалысында прецессиялық, нутациялық және жекеменшікті айналулардың бұрыштық үдеулерімен қатар қосымша бұрыштық үдеуі болатындығы және оның бір сэтте катарынан орын алғатын үш (немесе екі) айналулардың өзара әсерінің салдарынан туатындығы математикалық талдау арқылы дәлелденген. Қосымша бұрыштық үдеуді ескеру планеталар мен олардың серіктегінің және ұштын апараттар мен өзі жүретін құрылымдардың қозғалыстарын тиімді басқару үшін қажет.

K. Kozhamuratov

ADDITIONAL ANGULAR ACCELERATION OF A BODY IN SPHERICAL MOVEMENT

Almaty gumanitarno-technical university

Presence of a supplementary angular acceleration of a body having one immobile point is analytical proved in this work, on range with known angular accelerations of the precession, notation and property rotations. The supplementary angular acceleration arises as result of influence mutual of three (or two) simultaneous rotations of once body. Registration of the supplementary angular acceleration is necessity for a rational management by movements of planet's sputnik and of flying apparatus and of self-motion arrangements.