УДК 511

С. Ш. КОЖЕГЕЛЬДИНОВ

К ИССЛЕДОВАНИЮ ДИОФАНТОВЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ СТЕПЕНЕЙ. ПРИМЕРЫ

Изучаются свойства множества натуральных решений одного диофантова уравнения высшей степени от нескольких переменных. Доказывается теорема об эквивалентности общих формул всех таких решений.

Ключевые слова: диофантовы уравнения, арифметические функции.

1. При отыскании решений в натуральных числах диофантова уравнения

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \prod_{j=1}^{n} x_{ij}^{r_{ij}} = \sum_{\gamma=1}^{p} b_\gamma \prod_{\tau=1}^{q} y_{\gamma\tau}^{s_{\gamma\tau}}, x_{ij}, y_{\gamma\tau} \in N, \tag{1}$$

где

$$x_{ij}, y_{\gamma\tau} \in N,\ i = 1, 2, ..., m,\ j = 1, 2, ..., n,\ \gamma = 1, 2, ..., p,\ \tau = 1, 2, ..., q,\ m, n, p, q, a_i b_\gamma, r_{ij}, s_{\gamma\tau} -$$

данные натуральные числа,

$$\text{причем } r_i = r_{i1} + ... + r_{in},\ s_\gamma = s_{\gamma 1} + ... + s_{\gamma q},\ r = [r_1, ..., r_m],\ s = [s_1, ..., s_p],\ (r,s) = 1, \tag{2}$$

используются идеи, методы и результаты работ [1–8].

Ввиду того, что натуральные числа r и s в (1) с условием (2) являются взаимно простыми, существует, как известно бесконечное множество систем натуральных чисел φ и ψ таких, что: а) $r\varphi - s\psi = 1$, где $\varphi = \varphi_1 + sl$, $\psi = \psi_1 + rl$, $\varphi_1, \psi_1, l \in N$; б) $r\varphi - s\psi = -1$, где $\varphi = \varphi_2 + sl$, $\psi = \psi_2 + rl$, $\varphi_2, \psi_2, l \in N$. Отсюда следует, что $r\varphi_1 - s\psi_1 = 1$ и $r\varphi_2 - s\psi_2 = -1$. Более того, $r\varphi_1 - s\psi_1 = s\psi_2 - r\varphi_2$. Откуда $r(\varphi_1 + \varphi_2) = s(\psi_1 + \psi_2)$. Так как $(r, s) = 1$, то мы имеем, что $r = \psi_1 + \psi_2$, $s = \varphi_1 + \varphi_2$, где $(\varphi_1, \psi_1) = (\varphi_2, \psi_2) = 1$. Ими мы воспользуемся в дальнейшем.

Решение $(x_{11}, ..., x_{1n}, ..., x_{m1}, ..., x_{mn}, y_{11}, ..., y_{1q}, ..., y_{p1}, ..., y_{pq})$ диофантова уравнения (1) с условием (2) называется основным, если $\left(x_{11}^{r_{11}}, ..., x_{1n}^{r_{1n}}, ..., x_{m1}^{r_{m1}}, ..., x_{mn}^{r_{mn}}, y_{11}^{s_{11}}, ..., y_{1q}^{s_{1q}}, ..., y_{p1}^{s_{p1}}, ..., y_{pq}^{s_{pq}}\right)_{\deg rs} = 1$. Пусть, например,

$$2x_{11}^2 x_{12}^3 x_{13}^4 + 11 x_{21}^3, x_{21}^5 x_{22}^9, x_{23}^3 = 3y_{11}^2 y_{12}^4 y_{13}^3 + 5y_{21}^5 y_{22}^7 y_{23}^2 + 7y_{31}^8 y_{32}^{13} y_{33}^7, \tag{3}$$

где

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, y_{11}, y_{12}, y_{13}, y_{21}, y_{22}, y_{23}, y_{31}, y_{32}, y_{33} \in N. \tag{4}$$

Здесь, как не трудно заметить, $r = 45$, $s = 56$ и $rs = 2520$. Для диофантова уравнения (3) с условием (4) решение $(2^{82}.3^{100}.29^{25}.43^{255}$, $2^{80}.3^{101}.29^{25}.43^{255}$, $2^{81}.3^{100}.29^{25}.43^{255}$, $2^{48}.3^{60}.5!.29^{15}.43^{153}$, $2^{49}.3^{60}.29^{15}.43^{153}$, $2^{48}.3^{61}.29^{15}.43^{153}$, $2^{93}.3^{112}.29^{28}.43^{287}$, $2^{92}.3^{112}.29^{28}.43^{287}$, $2^{91}.3^{114}.29^{28}.43^{287}$, $2^{52}.3^{65}.29^{16}.43^{164}$, $2^{52}.3^{64}.29^{16}.43^{164}$, $2^{55}.3^{64}.29^{16}.43^{164}$, $2^{27}.3^{32}.29^{8}.43^{82}$, $2^{26}.3^{32}.29^{8}.43^{82}$, $2^{26}.3^{33}.29^{8}.43^{82}$) является основным решением, так как $(2^{728}.3^{903}.29^{225}.43^{2295}$, $2^{729}.3^{903}.5^{3}.29^{225}.43^{2295}$, $2^{736}.3^{900}.29^{224}.43^{2296}$, $2^{734}.3^{901}.29^{224}.43^{2296}$, $2^{736}.3^{903}.29^{224}.43^{2296})_{\deg 2520} = 1$.

2. **Постановка задачи.**

Пусть $\{< x_{11}, ..., x_{1n}, ..., x_{m1}, ..., x_{mn}, y_{11}, ..., y_{1q}, ..., y_{p1}, ..., y_{pq} > | (2) \wedge (1)\}$ – множество всех решений диофантова уравнения (1) с условием (2). Требуется найти общую формулу, описывающую все эти решения. При этом ставится задача, чтобы число целых параметров, входящих в такую общую формулу, не превышало $mn + pq + 1$.

3. **Теорема.** Каждая из следующих эквивалентных формул:

$$x_{ij} = k^{\frac{rs}{r_i}} \frac{a_{ij} a^{\frac{r(s-\varphi_1)}{r_i}} b^{\frac{r\varphi_1}{r_i}}}{\Delta^{\frac{rs}{r_i}}}, \qquad y_{\gamma\tau} = k^{\frac{rs}{s_\gamma}} \frac{b_{\gamma\tau} a^{\frac{s(r-\psi_1)}{s_\gamma}} b^{\frac{s\psi_1}{s_\gamma}}}{\Delta^{\frac{rs}{s_\gamma}}}, \tag{5}$$

где $k, a_{ij}, b_{\gamma\tau} \in N$, $i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, 2, ..., n$, $\gamma = 1, 2, .., p$, $\tau = 1, 2, .., q$, $m, n, p, q, a_i, b_\gamma, r_{ij}, s_{\gamma\tau}$ – данные натуральные числа, причем $r_i = r_{i1} + ... + r_{in}$, $i = 1, 2, ..., m$, $s_\gamma = s_{\gamma 1} + ... + s_{\gamma q}$, $\gamma = 1, 2, .., p$, $r = [r_1, ..., r_m]$, $s = [s_1, ..., s_p]$, $(r, s) = 1$, $r\varphi_1 - s\psi_1 = 1$.

$$a = \sum_{i=1}^{m} a_i \prod_{j=1}^{n} a_{ij}^{r_{ij}}, \qquad b = \sum_{\gamma=1}^{p} b_\gamma \prod_{\tau=1}^{q} b_{\gamma\tau}^{s_{\gamma\tau}}, \tag{6}$$

$$\left(\prod_{j=1}^{n} a_{1j}^{r_{1j}}, ..., \prod_{j=1}^{n} a_{mj}^{r_{mj}} \right)_{\deg r} = \left(\prod_{\tau=1}^{q} b_{1\tau}^{s_{1\tau}}, ..., \prod_{\tau=1}^{q} b_{p\tau}^{s_{p\tau}} \right)_{\deg s} = 1,$$

$$\Delta = \left(a^{r(s-\varphi_1)} b^{s\psi_1} \left(a\left(\prod_{\tau=1}^{q} b_{1\tau}^{s_{1\tau}}, ..., \prod_{\tau=1}^{q} b_{p\tau}^{s_{p\tau}} \right), b\left(\prod_{j=1}^{n} a_{1j}^{r_{1j}}, ..., \prod_{j=1}^{n} a_{mj}^{r_{mj}} \right) \right) \right)_{\deg rs};$$

$$x_{ij} = k^{\frac{rs}{r_i}} \frac{a_{ij} a^{\frac{r\psi_2}{r_i}} b^{\frac{r(s-\psi_2)}{r_i}}}{\Delta^{\frac{rs}{r_i}}}, \qquad y_{\gamma\tau} = k^{\frac{rs}{s_\gamma}} \frac{b_{\gamma\tau} a^{\frac{s\psi_2}{s_\gamma}} b^{\frac{s(r-\varphi_2)}{s_\gamma}}}{\Delta^{\frac{rs}{s_\gamma}}}, \tag{7}$$

где $k, a_{ij}, b_{\gamma\tau} \in N$, $i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, 2, ..., n$, $\gamma = 1, 2, .., p$, $\tau = 1, 2, .., q$, $m, n, p, q, a_i, b_\gamma, r_{ij}, s_{\gamma\tau}$ – данные натуральные числа, причем $r_i = r_{i1} + ... + r_{in}$, $i = 1, 2, ..., m$, $s_\gamma = s_{\gamma 1} + ... + s_{\gamma q}$, $\gamma = 1, 2, .., p$, $r = [r_1, ..., r_m]$, $s = [s_1, ..., s_p]$, $(r, s) = 1$, $r\varphi_2 - s\psi_2 = 1$.

$$a = \sum_{i=1}^{m} a_i \prod_{j=1}^{n} a_{ij}^{r_{ij}}, \qquad b = \sum_{\gamma=1}^{p} b_\gamma \prod_{\tau=1}^{q} b_{\gamma\tau}^{s_{\gamma\tau}},$$

$$\left(\prod_{j=1}^{n} a_{1j}^{r_{1j}}, ..., \prod_{j=1}^{n} a_{mj}^{r_{mj}} \right)_{\deg r} = \left(\prod_{\tau=1}^{q} b_{1\tau}^{s_{1\tau}}, ..., \prod_{\tau=1}^{q} b_{p\tau}^{s_{p\tau}} \right)_{\deg s} = 1,$$

$$\Delta = \left(a^{r\varphi_2} b^{s(r-\psi_2)} \left(a\left(\prod_{\tau=1}^{q} b_{1\tau}^{s_{1\tau}}, ..., \prod_{\tau=1}^{q} b_{p\tau}^{s_{p\tau}} \right), b\left(\prod_{j=1}^{n} a_{1j}^{r_{1j}}, ..., \prod_{j=1}^{n} a_{mj}^{r_{mj}} \right) \right) \right)_{\deg rs} \tag{8}$$

является общей формулой всех решений диофантова уравнения (1) с условием (2). При этом каждое такое решение определяется каждым из этих способов однозначно.

Для удобства совокупность формул вида (5) называется формулой не только здесь, но и в дальнейшем.

Из теоремы очевидным образом вытекает то, что при выполнении соответственно условий (6) и (8) каждая из эквивалентных общих формул (5) и (7) всех решений диофантова уравнения (1) с условием (2) при $k = 1$ является эквивалентной общей формулой всех основных решений этого уравнения.

Используя это (а также теорему) можно найти все основные (а следовательно, и все) решения диофантова уравнения (3) с условием (4).

Тем же путем, каким мы получили все решения диофантова уравнения (1) с условием (2) могут быть получены и все натуральные решения других таких уравнений того же типа.

Доказательство теоремы. Положим, что $r\varphi_1 - s\psi_1 = 1$,

$$x_{ij} = k^{\frac{rs}{r_i}} \frac{a^{\frac{rs}{r_{ij}}}}{\Delta^{\frac{rs}{r_i}}}, \qquad y_{\gamma\tau} = k^{\frac{rs}{s_\gamma}} \frac{a^{\frac{rs}{s_{\gamma\tau}}}}{\Delta^{\frac{rs}{s_\gamma}}}, \tag{9}$$

$$\Delta = \left(a^{r(r-\varphi_1)} b^{s\psi_1} \left(a\left(\prod_{\tau=1}^{q} b_{1\tau}^{s_{1\tau}}, \ldots, \prod_{\tau=1}^{q} b_{p\tau}^{s_{p\tau}} \right), b\left(\prod_{j=1}^{n} a_{1j}^{r_{1j}}, \ldots, \prod_{j=1}^{n} a_{mj}^{r_{mj}} \right) \right) \right)_{\deg rs},$$

$$a = \sum_{i=1}^{m} a_i \prod_{j=1}^{n} a_{ij}^{r_{ij}}, \qquad b = \sum_{\gamma=1}^{p} b_\gamma \prod_{\tau=1}^{q} b_{\gamma\tau}^{s_{\gamma\tau}},$$

$$\left(\prod_{j=1}^{n} a_{1j}^{r_{1j}}, \ldots, \prod_{j=1}^{n} a_{mj}^{r_{mj}} \right)_{\deg r} = \left(\prod_{\tau=1}^{q} b_{1\tau}^{s_{1\tau}}, \ldots, \prod_{\tau=1}^{q} b_{p\tau}^{s_{p\tau}} \right)_{\deg r} = 1, \tag{9}$$

$$r, s, \varphi_1, \psi_1, a_{ij}, b_{\gamma\tau} \in N, \ (z,s) = (\varphi_1, \psi_1) = 1, \ r > \psi_1, \ s > \varphi_1,$$

u_{ij}, $\vartheta_{\gamma\tau}$ – такие положительные рациональные множители, что после умножения на них значения x_{ij}, $y_{\gamma\tau}$ становятся натуральными.

Для нахождения рациональных значений u_{ij}, $\vartheta_{\gamma\tau}$ рассмотрим следующее вспомогательное диофантово уравнение

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \prod_{j=1}^{n} u_{ij}^{r_{ij}} = \sum_{\gamma=1}^{p} b_\gamma \prod_{\tau=1}^{q} \vartheta_{\gamma\tau}^{s_{\gamma\tau}}, \tag{11}$$

u_{ij}, $\vartheta_{\gamma\tau} \in Q^+$, $m, n, p, q, a_i, b_\gamma, r_{ij}, s_{\gamma\tau}$ – данные натуральные числа,

причем $r_i = r_{i1} + \ldots + r_{in}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $s_\gamma = s_{\gamma 1} + \ldots + s_{\gamma q}$, $\gamma = 1, 2, \ldots, p$,

$$r = [r_1, \ldots, r_m], \ s = [s_1, \ldots, s_p], \ (r,s) = 1, \ r\varphi_1 - s\psi_1 = 1. \tag{12}$$

Пусть в (11) с условием (12)

$$u_{ij} = a_{ij} t^{r\psi_1 / r_i}, \qquad \vartheta_{\gamma\tau} = b_{\gamma\tau} t^{s\psi_1 / s_\gamma}, \tag{13}$$

где

$$a_{ij}, b_{\gamma\tau} \in N, \ i = 1, 2, \ldots, m, \ j = 1, 2, \ldots, n, \ \gamma = 1, 2, \ldots, p, \ \tau = 1, 2, \ldots, q. \tag{14}$$

Из (11) с условием (12) в силу (13) с условием (14) следует, что

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \prod_{j=1}^{n} a_{ij}^{r_{ij}} t^{\frac{r\psi_1}{r_i} r_{ij}} = \sum_{\gamma=1}^{p} b_\gamma \prod_{\tau=1}^{q} b_{\gamma\tau}^{s_{\gamma\tau}} t^{\frac{s\psi_1}{s_\gamma} s_{\gamma\tau}},$$

откуда

$$t = \frac{b}{a}, \tag{15}$$

где

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \prod_{j=1}^{n} a_{ij}^{r_{ij}}, \qquad b=\sum_{\gamma=1}^{p} b_\gamma \prod_{\tau=1}^{q} b_{\gamma\tau}^{s_{\gamma\tau}}. \tag{16}$$

Из (13) с условием (14) в силу (15) с условием (16) имеем, что

$$u_{ij} = \frac{a_{ij} b^{r\varphi_1/s_1}}{a^{r\psi_1/r_i}}, \qquad \vartheta_{\gamma\tau} = \frac{b_{\gamma\tau} b^{s\psi_1/s_\gamma}}{b^{s\psi_1/s_\gamma}}, \tag{17}$$

где

$$a_{ij}, b_{\gamma\tau} \in N,\ i = 1, 2, ..., m,\ j = 1, 2, ..., n,\ \gamma = 1, 2, .., p,\ \tau = 1, 2, .., q. \tag{18}$$

$$a = \sum_{i=1}^{m} a_i \prod_{j=1}^{n} a_{ij}^{r_{ij}}, \qquad b=\sum_{\gamma=1}^{p} b_\gamma \prod_{\tau=1}^{q} b_{\gamma\tau}^{s_{\gamma\tau}}.$$

Из (9) с условием (10) в силу (17) с условием (18) получается формула (5) с условием (6), которая является общей формулой вех решений диофантова уравнения (1) с условием (2). Без особого труда можно убедиться в том, что значение $x_{ij}, y_{\gamma\tau}$ из формулы (5) действительно удовлетворяют диофантову уравнению (1) с условием (2). При этом нетрудно заметить, что

$$\left(x_{11}^{r_{11}}, ..., x_{1n}^{r_{1n}}, ..., x_{m1}^{r_{m1}}, ..., x_{mn}^{r_{mn}}, y_{11}^{s_{11}}, ..., y_{1q}^{s_{1q}}, ..., y_{p1}^{s_{p1}}, ..., y_{pq}^{s_{pq}}\right)_{\deg rs} = k,$$

где $k \in N$. И так как

$$\left(\prod_{j=1}^{n} a_{1j}^{r_{1j}}, ..., \prod_{j=1}^{n} a_{mj}^{r_{mj}}\right)_{\deg r} = \left(\prod_{\tau=1}^{q} b_{1\tau}^{s_{1\tau}}, ..., \prod_{\tau=1}^{q} b_{p\tau}^{s_{p\tau}}\right)_{\deg s} = 1,$$

то каждое решение диофантова уравнения (1) с условием (2) определяется этим способом однозначно. Этим первая часть теоремы доказана. Докажем теперь эквивалентность формул (5) и (7). Схема доказательства такова: (5) $\Rightarrow$ (7) $\Rightarrow$ (5).

Из равенств $s = \varphi_1 + \varphi_2$, $r = \psi_1 + \psi_2$, о котором речь шла выше, следуют, что Поэтому $s - \varphi_1 = \varphi_2$, $\varphi_1 = s - \varphi_2$, $r - \psi_1 = \psi_2$, $\psi_1 = r - \psi_2$. Поэтому

$$\frac{r(s-\varphi_1)}{r_i} = \frac{r\varphi_2}{r_i}, \qquad \frac{r\varphi_1}{r_i} = \frac{r(s-\varphi_2)}{r_i}, \qquad \frac{s(r-\psi_1)}{s_\gamma} = \frac{r\psi_2}{s_\gamma}, \qquad \frac{r\psi_1}{s_\gamma} = \frac{s(r-\psi_2)}{s_\gamma},$$

Следовательно, из формулы (5) следует формула (7). Из тех же равенств, т.е. из равенств $s = \varphi_1 + \varphi_2$, $r = \psi_1 + \psi_2$ следует, что $\varphi_2 = s - \varphi_1$, $s - \varphi_2 = \varphi_1$, $\psi_2 = r - \psi_1$, $r - \psi_2 = \psi_1$. Поэтому

$$\frac{r\varphi_2}{r_i} = \frac{r(s-\varphi_1)}{r_i}, \qquad \frac{r(s-\varphi_2)}{r_i} = \frac{r\varphi_1}{r_i}, \qquad \frac{r\psi_2}{s_\gamma} = \frac{s(r-\psi_1)}{s_\gamma}, \qquad \frac{s(r-\psi_2)}{s_\gamma} = \frac{r\psi_1}{s_\gamma}.$$

Следовательно, из формулы (7) следует формула (5). Таким образом, при выполнении условий (6) и (8) соответственно общие формулы (5) и (7) всех решений диофантова уравнения (1) с условием (2) эквивалентны. Теорема полностью доказана.

Напомним, что целая часть числа α обозначается $[\alpha]$ и, что каноническим разложением целого числа $a > 1$ называется представление a в виде $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$, где k, α_1, α_2, ..., α_k – натуральные числа, $p_1, p_2, ..., p_k$ – попарно различные простые числа. Пусть n – натуральное число. Известно, что число вида

$$p_1^{\left[\frac{\alpha_1}{n}\right]}, p_2^{\left[\frac{\alpha_2}{n}\right]}, ..., p_k^{\left[\frac{\alpha_k}{n}\right]}$$

$$k, a_{11}, \ldots, a_{23}, b_{11}, \ldots, b_{23} \in N,$$

$$\left(a_{11}^2 a_{12}^3 a_{13}^4, a_{21}^4 a_{22}^9 a_{23}^3\right)_{\deg 45} = \left(b_{11}^2 b_{12}^4 b_{13}^2, b_{21}^5 b_{22}^7 b_{23}^2, b_{31}^8 b_{32}^{13} b_{33}^7\right)_{\deg 56} = 1, \tag{20}$$

$$\Delta = \left(a^{2295} b^{224} \left(a\left(b_{11}^2 b_{12}^4 b_{13}^2, b_{21}^5 b_{22}^7 b_{23}^2, b_{31}^8 b_{32}^{13} b_{33}^7\right), b\left(a_{11}^2 a_{12}^3 a_{13}^4, a_{21}^4 a_{22}^9 a_{23}^3\right)\right)\right)_{\deg 2520},$$

$$a = 2a_{11}^2 a_{12}^3 a_{13}^4 + 11 a_{21}^4 a_{22}^9 a_{23}^3, \qquad b = 3b_{11}^2 b_{12}^4 b_{13}^2 + 5b_{21}^5 b_{22}^7 b_{23}^2 + 7b_{31}^8 b_{32}^{13} b_{33}^7.$$

Далее пусть $k = 86^{12}$, $a_{11} = 2^2$, $a_{12} = 3$, $a_{13} = 2$, $a_{21} = 5$, $a_{22} = 2$, $a_{23} = 3$, $b_{11} = 2^2$, $b_{12} = 2$, $b_{13} = 3^2$, $b_{21} = 3$, $b_{22} = 1$, $b_{23} = 2^3$, $b_{31} = 2$, $b_{32} = 1$, $b_{33} = 3$.

Тогда условие (20) выполнено. А так как $a = 2^{14} \cdot 3^3 \cdot 43$, $b = 2^6 \cdot 3^7 \cdot 29$, $\Delta = 2^{13} \cdot 3^3$, то формула (19) дает для диофантова уравнения (3) с условием (4) следующее решение

$$\begin{aligned}
&x_{11} = 2^{3442} \cdot 3^{100} \cdot 29^{25} \cdot 43^{3615}, \quad x_{12} = 2^{3440} \cdot 3^{101} \cdot 29^{25} \cdot 43^{3615}, \quad x_{13} = 2^{3441} \cdot 3^{100} \cdot 29^{25} \cdot 43^{3615},\\
&x_{21} = 2^{2064} \cdot 3^{60} \cdot 5^{1} \cdot 29^{15} \cdot 43^{2169}, \quad x_{22} = 2^{2065} \cdot 3^{60} \cdot 29^{15} \cdot 43^{2169}, \quad x_{23} = 2^{2065} \cdot 3^{61} \cdot 29^{15} \cdot 43^{2169},\\
&y_{11} = 2^{3873} \cdot 3^{112} \cdot 29^{28} \cdot 43^{4067}, \quad y_{12} = 2^{3872} \cdot 3^{112} \cdot 29^{28} \cdot 43^{4067}, \quad y_{13} = 2^{3871} \cdot 3^{114} \cdot 29^{28} \cdot 43^{4067},\\
&y_{21} = 2^{2212} \cdot 3^{65} \cdot 29^{16} \cdot 43^{2324}, \quad y_{22} = 2^{2212} \cdot 3^{64} \cdot 29^{16} \cdot 43^{2324}, \quad y_{23} = 2^{2215} \cdot 3^{64} \cdot 29^{16} \cdot 43^{2324},\\
&y_{31} = 2^{1107} \cdot 3^{32} \cdot 29^{8} \cdot 43^{1162}, \quad y_{32} = 2^{1106} \cdot 3^{32} \cdot 29^{8} \cdot 43^{1162}, \quad y_{33} = 2^{1106} \cdot 3^{33} \cdot 29^{8} \cdot 43^{1162},
\end{aligned} \tag{*}$$

которое не является основным. Если же при этом возьмем $k = 1$, то получим основное решение, приведенное выше на с. 1. Это решение, а также решение (*) можно получить исходя из $r\varphi_2 - s\psi_2 = -1$. В самом деле, из $r\varphi_2 - s\psi_2 = -1$ следует, что $\varphi_2 = 51$, $\psi_2 = 41$, $(\varphi_2, \psi_2) = 1$, $r\varphi_2 = 2295$, $s\psi_2 = 2296$, $r(s-\varphi_2) = 225$, $s(r-\psi_2) = 224$, $\frac{rs}{r_1} = 280$, $\frac{rs}{r_2} = 168$, $\frac{rs}{s_1} = 315$, $\frac{rs}{s_2} = 180$, $\frac{rs}{s_3} = 90$, $\frac{r\varphi_2}{r_1} = 255$, $\frac{r\varphi_2}{r_2} = 153$, $\frac{r\psi_2}{s_1} = 287$, $\frac{r\psi_2}{s_2} = 164$, $\frac{r\psi_2}{s_3} = 82$, $\frac{r(s-\varphi_2)}{r_1} = 25$, $\frac{r(s-\varphi_2)}{r_2} = 15$, $\frac{s(r-\psi_2)}{s_1} = 28$, $\frac{s(r-\psi_2)}{s_2} = 16$, $\frac{s(r-\psi_2)}{s_3} = 8$.

Поэтому формула (7) с условием (8) принимает вид (19) с условием (20). Отсюда, как и выше, для диофантова уравнения (3) с условием (4) получаем при $k = 1$ основное решение, а при $k = 86^{12}$ решение (*).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гельфонд А.О.* Решение уравнений в целых числах. М., 1978. 64 с.

2. *Кожегельдинов С.Ш.* Отыскание основных героновых треугольников (ГТ) // Изв. АН РК. Сер. физ.-мат. 1992. № 3. С. 48-51.

3. *Кожегельдинов С.Ш.* Об основных героновых треугольниках // Математические заметки. 1994. Т. 55, вып. 2. С. 72-79.

4. *Кожегельдинов С.Ш.* К решению уравнений высших степеней в натуральных числах // Междунар. конф. «Современное состояние и перспективы развития математики в рамках программы «Казахстан в третьем тысячелетии». Тезисы докл. Алматы: Ин-т матем. МОиН РК, 2000. С. 158, 159.

5. *Кожегельдинов С.Ш.* Об одном диофантовом уравнении // Междунар. конф. «Современные проблемы теории чисел и ее приложения». Тула: ТГПУ, 1996. С. 77.

6. *Кожегельдинов С.Ш.* Двухтысячелетний барьер взят. Избранные статьи и доклады. Алматы, 2001. 345 с.

7. *Серпинский В.* О решении уравнений в целых числах. М., 1961. 88 с.

8. *Ферма П.* Исследования по теории чисел и диофантову анализу. М., 1992. 320 с.

Семипалатинский государственный
педагогический институт

Поступила 10.02.2010г.

$$k, a_{11}, \ldots, a_{23}, b_{11}, \ldots, b_{23} \in N,$$

$$\left(a_{11}^2 a_{12}^3 a_{13}^4, a_{21}^4 a_{22}^9 a_{23}^3\right)_{\deg 45} = \left(b_{11}^2 b_{12}^4 b_{13}^2, b_{21}^5 b_{22}^7 b_{23}^2, b_{31}^8 b_{32}^{13} b_{33}^7\right)_{\deg 56} = 1, \tag{20}$$

$$\Delta = \left(a^{2295} b^{224} \left(a\left(b_{11}^2 b_{12}^4 b_{13}^2, b_{21}^5 b_{22}^7 b_{23}^2, b_{31}^8 b_{32}^{13} b_{33}^7\right), b\left(a_{11}^2 a_{12}^3 a_{13}^4, a_{21}^4 a_{22}^9 a_{23}^3\right)\right)\right)_{\deg 2520},$$

$$a = 2a_{11}^2 a_{12}^3 a_{13}^4 + 11 a_{21}^4 a_{22}^9 a_{23}^3, \qquad b = 3b_{11}^2 b_{12}^4 b_{13}^2 + 5b_{21}^5 b_{22}^7 b_{23}^2 + 7b_{31}^8 b_{32}^{13} b_{33}^7.$$

Далее пусть $k = 86^{12}$, $a_{11} = 2^2$, $a_{12} = 3$, $a_{13} = 2$, $a_{21} = 5$, $a_{22} = 2$, $a_{23} = 3$, $b_{11} = 2^2$, $b_{12} = 2$, $b_{13} = 3^2$, $b_{21} = 3$, $b_{22} = 1$, $b_{23} = 2^3$, $b_{31} = 2$, $b_{32} = 1$, $b_{33} = 3$.

Тогда условие (20) выполнено. А так как $a = 2^{14} \cdot 3^3 \cdot 43$, $b = 2^6 \cdot 3^7 \cdot 29$, $\Delta = 2^{15} \cdot 3^3$, то формула (19) дает для диофантова уравнения (3) с условием (4) следующее решение

$$\begin{aligned}
&x_{11} = 2^{3442} \cdot 3^{100} \cdot 29^{25} \cdot 43^{3615}, \quad x_{12} = 2^{3440} \cdot 3^{101} \cdot 29^{25} \cdot 43^{3615}, \quad x_{13} = 2^{3441} \cdot 3^{100} \cdot 29^{25} \cdot 43^{3615},\\
&x_{21} = 2^{2064} \cdot 3^{60} \cdot 5^{1} \cdot 29^{15} \cdot 43^{2169}, \quad x_{22} = 2^{2065} \cdot 3^{60} \cdot 29^{15} \cdot 43^{2169}, \quad x_{23} = 2^{2065} \cdot 3^{61} \cdot 29^{15} \cdot 43^{2169},\\
&y_{11} = 2^{3873} \cdot 3^{112} \cdot 29^{28} \cdot 43^{4067}, \quad y_{12} = 2^{3872} \cdot 3^{112} \cdot 29^{28} \cdot 43^{4067}, \quad y_{13} = 2^{3871} \cdot 3^{114} \cdot 29^{28} \cdot 43^{4067},\\
&y_{21} = 2^{2212} \cdot 3^{65} \cdot 29^{16} \cdot 43^{2324}, \quad y_{22} = 2^{2212} \cdot 3^{64} \cdot 29^{16} \cdot 43^{2324}, \quad y_{23} = 2^{2215} \cdot 3^{64} \cdot 29^{16} \cdot 43^{2324},\\
&y_{31} = 2^{1107} \cdot 3^{32} \cdot 29^{8} \cdot 43^{1162}, \quad y_{32} = 2^{1106} \cdot 3^{32} \cdot 29^{8} \cdot 43^{1162}, \quad y_{33} = 2^{1106} \cdot 3^{33} \cdot 29^{8} \cdot 43^{1162},
\end{aligned} \tag{*}$$

которое не является основным. Если же при этом возьмем $k = 1$, то получим основное решение, приведенное выше на с. 1. Это решение, а также решение (*) можно получить исходя из $r\varphi_2 - s\psi_2 = -1$. В самом деле, из $r\varphi_2 - s\psi_2 = -1$ следует, что $\varphi_2 = 51$, $\psi_2 = 41$, $(\varphi_2, \psi_2) = 1$, $r\varphi_2 = 2295$, $s\psi_2 = 2296$, $r(s-\varphi_2) = 225$, $s(r-\psi_2) = 224$, $\frac{rs}{r_1} = 280$, $\frac{rs}{r_2} = 168$, $\frac{rs}{s_1} = 315$, $\frac{rs}{s_2} = 180$, $\frac{rs}{s_3} = 90$, $\frac{r\varphi_2}{r_1} = 255$, $\frac{r\varphi_2}{r_2} = 153$, $\frac{r\psi_2}{s_1} = 287$, $\frac{r\psi_2}{s_2} = 164$, $\frac{r\psi_2}{s_3} = 82$, $\frac{r(s-\varphi_2)}{r_1} = 25$, $\frac{r(s-\varphi_2)}{r_2} = 15$, $\frac{s(r-\psi_2)}{s_1} = 28$, $\frac{s(r-\psi_2)}{s_2} = 16$, $\frac{s(r-\psi_2)}{s_3} = 8$.

Поэтому формула (7) с условием (8) принимает вид (19) с условием (20). Отсюда, как и выше, для диофантова уравнения (3) с условием (4) получаем при $k = 1$ основное решение, а при $k = 86^{12}$ решение (*).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гельфонд А.О.* Решение уравнений в целых числах. М., 1978. 64 с.

2. *Кожегельдинов С.Ш.* Отыскание основных героновых треугольников (ГТ) // Изв. АН РК. Сер. физ.-мат. 1992. № 3. С. 48-51.

3. *Кожегельдинов С.Ш.* Об основных героновых треугольниках // Математические заметки. 1994. Т. 55, вып. 2. С. 72-79.

4. *Кожегельдинов С.Ш.* К решению уравнений высших степеней в натуральных числах // Междунар. конф. «Современное состояние и перспективы развития математики в рамках программы «Казахстан в третьем тысячелетии». Тезисы докл. Алматы: Ин-т матем. МОиН РК, 2000. С. 158, 159.

5. *Кожегельдинов С.Ш.* Об одном диофантовом уравнении // Междунар. конф. «Современные проблемы теории чисел и ее приложения». Тула: ТГПУ, 1996. С. 77.

6. *Кожегельдинов С.Ш.* Двухтысячелетний барьер взят. Избранные статьи и доклады. Алматы, 2001. 345 с.

7. *Серпинский В.* О решении уравнений в целых числах. М., 1961. 88 с.

8. *Ферма П.* Исследования по теории чисел и диофантову анализу. М., 1992. 320 с.

Семипалатинский государственный
педагогический институт

Поступила 10.02.2010г.