А. А. КОПЖАСАРОВА, А. Ш. ШАЛДАНБАЕВ

(Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, г. Шымкент)

«СПЕКТРАЛЬНОЕ» РАЗЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ С НЕУСИЛЕННО РЕГУЛЯРНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

Аннотация

В настоящей работе получены спектральные разложения решений задачи Штурма–Лиувилля с не усиленно регулярными краевыми условиями.

Ключевые слова: неусиленно регулярные краевые условия, оператор Штурма–Лиувилля.

Кілт сөздер: шарттары онша қолайлы емес жағдайлар, Штурм–Лиувилль операторы.

Keywords: not strongly regular regional conditions, the operator of Sturm-Liouville.

1. Рассмотрим в пространстве $L^2(0,1)$ краевую задачу Штурма-Лиувиля

$$Ly = -y''(x) = \lambda y(x); x \in (0,1), \tag{1}$$

$$U_i(y) = a_{i1}y(0) + a_{i2}y'(0) + a_{i3}y(1) + a_{i4}y'(1) = 0 \ (i = 1,2), \tag{2}$$

с двумя линейно независимыми граничными условиями.

Известно,что если краевые условия (2) являются усиленно регулярными [1], то система собст-венных и присоединенных функций задачи (1)-(2) будет образовать базис Рисса. Если краевые условия (2) неусиленно регулярны, то, вообще говоря, собственные и присоединенные функций задачи (1)-(2) не образуют базиса Рисса [2; 92]. Поэтому представляет интерес методы регуля-ризаций задачи (1)-(2).

Приемам регуляризаций решения некорректных краевых задач посвещена обширная лите-ратура. В частности, широко используются методы, основанные на изменении типа или порядка уравнения при помощи малых сингулярных возмущений(см. [3]).

В данной работе, мы предлагаем регуляризовать оператор L с помощью симметризаций,т.е. найдем такой оператор преобразавания T, что оператор TL окажется симметрическим на своей области определения. Далее воспользуясь компактностью и самосопряженностью обратного оператора $(TL)^{-1}$, получим «спектральное» разложение решений краевой задачи. Поводом для написания настоящей работы послужила работа [4].

2. Вспомогательные предложения

Лемма 1. Граничные условия (2) краевой задачи Штурма-Лиувилля неусиленно регулярны тогда и только тогда, когда имеют место соотношения

1) $\Delta_{24} = 0$; 2) $\Delta_{14} + \Delta_{32} \neq 0$; 3) $\Delta_{12}^2 + \Delta_{34}^2 = \Delta_{14}^2 + \Delta_{32}^2$,

(3)

где $\Delta_{ij} = a_{1i}a_{2i} - a_{1j}a_{2i}(i,j = 1,2,3,4)$.

Лемма 2. Если функция экспонциального типа $f(z)$ не имеет нулей на всей комплексной плоскости, то

$$f(z) = e^{az+b},$$

где a, b – некоторые комплексные постоянные [4; 31].

Лемма 3. Если

$$\Delta_{ij} = \begin{vmatrix} a_{1i} a_{1j} \\ a_{2i} a_{2j} \end{vmatrix} = a_{1i} \times a_{2j} - a_{1j}a_{2i}(i,j = 1,2,3,4),$$

то имеет место формула

$$\Delta_{13}\Delta_{24} + \Delta_{14} \times \Delta_{32} - \Delta_{12} \times \Delta_{34} = 0,$$

(4)

которая является следствием леммы 1. Ее можно доказать и непосредственно с помощью прямых вычислений. Соотношения (3) используются при выводе граничных условий (6), (8), формула (4) упрощает многие вычисления.

3. Основные результаты

Теорема 1. Если гранчные условия краевой задачи Штурма-Лиувилля

$$Ly = -y''(x) = \lambda y(x); x \in (0,1), \quad (1)$$

$$U_i(y) = a_{i1}y(0) + a_{i2}y'(0) + a_{i3}y(1) + a_{i4}y'(1) = 0 \ (i = 1,2), \quad (2)$$

линейно независимы и неусиленно регулярны, то они приводимы к одному из двух видов

$$L^+ y = -y''(x); \ x \in (0,1), \quad (5)$$

$$\Delta_{13}y(0) - \Delta_{32}y'(0) - \Delta_{14}y'(1) = 0, \quad (6)$$

$$y(0) + y(1) = 0.$$

$$L^- y = -y''(x); x \in (0,1), \quad (7)$$

$$\Delta_{13}y(0) - \Delta_{32}y'(0) + \Delta_{14}y'(1) = 0, \quad (8)$$

$$y(0) - y(1) = 0,$$

или им сопряженным, где $\Delta_{ij} = a_{1i}a_{2i} - a_{1j} \times a_{2i} \quad (i, j = 1,2,3,4)$.

Теорема 2. Если $\Delta_{32}^2 - \Delta_{14}^2 \neq 0$, то операторы

$$L^{+}y = -y''(x); \; x \in (0,1), \tag{5}$$

$$\Delta_{13}y(0) - \Delta_{32}y'(0) - \Delta_{14}y'(1) = 0, \tag{6}$$

$$y(0) + y(1) = 0.$$

$$\hat{L}^{+}u = -u''(x), \; x \in (0,1), \tag{5'}$$

$$\begin{cases} u'(0) - \alpha u(0) = 0, \\ u(0) + u(1) = 0 \end{cases} \qquad \alpha = \frac{\Delta_{13}}{\Delta_{32} + \Delta_{14}}, \tag{6'}$$

подобны между собой. Оператор подобия T имеет вид

$$u(x) = Ty(x) = (\Delta_{32}I - \Delta_{14}S)\,y(x), \tag{9}$$

где $Sy(x) = y(1-x)$.

Теорема 3. Если $\Delta_{32}^2 - \Delta_{14}^2 \neq 0$, то операторы

$$L^{-}y = -y''(x); x \in (0,1), \tag{7}$$

$$\Delta_{13}y(0) - \Delta_{32}y'(0) + \Delta_{14}y'(1) = 0, \tag{8}$$

$$y(0) - y(1) = 0,$$

$$\hat{L}^{-}v = -v''(x), \; x \in (0,1), \tag{7'}$$

$$v'(0) - \alpha v(0) = 0 \qquad \alpha = \frac{\Delta_{13}}{\Delta_{32} + \Delta_{14}}, \tag{8'}$$

$$v(0) - v(1) = 0,$$

подобны между собой, и оператор подобия имеет вид

$$v(x) = Ty(x) = \Delta_{32}y(x) + \Delta_{14}y(1-x) = (\Delta_{32}I + \Delta_{14}S)y(x) \tag{10}$$

где $Sy(x) = y(1-x)$.

Теорема 4. Если $\alpha = \bar{\alpha}$ и $\alpha \neq -2$, то имеет место «спектральные» разложения

1. $f = \sum_{n=1}^{\infty}(f, \varphi_n)\,\varphi_n, \; \forall f \in L^2(0,1);$ (11)

2. $(L^{+})^{-1}g = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(g, T\varphi_n)}{\lambda_n}\varphi_n, \; TL^{+}\varphi_n = \lambda_n\varphi_n;$ (12)

3. $$[(L^+)^*]^{-1}f = T\circ\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(f,\varphi_n)}{\lambda_n}\varphi_n \approx \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(f,\varphi_n)}{\lambda_n}T\varphi_n\,,$$
(13)
где $\{\varphi_n\}$ – ортонормированный базис пространств $H = L^2(0,1)$, составленный из собственных векторов оператора TL^+, f и g произвольные элементы этого же пространства, а оператор T имеет следующий вид
$$Tu(x) = u'(1-x) - \alpha u(1-x), \tag{14}$$
$$u(0) + u(1) = 0.$$

Теорема 5. Если $\alpha = \bar{\alpha},\ \alpha \neq 0$, то имеет место «спектральные» разложения

1. $f = \sum_{m=1}^{\infty}(f,\psi_m)\,\psi_m;$
(15)
2. $(L^-)^{-1}g = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(g,T\psi_m)}{\mu_m},\ TL^-\psi_m = \mu_m\psi_m;$
(16)
3. $[(L^-)^*]^{-1}f = T\circ\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(f,\psi_m)}{\mu_m}\psi_m \approx \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(f,\psi_m)}{\mu_m}T\psi_m,$
(17)
где $\{\psi_m\}^{\infty}$ – ортонормированный базис пространства $H = L^2(0,1)$, составленный из собственных векторов оператора TL^-, f и g произвольные элементы этого же пространства, оператор T имеет следующий вид.
$$Tu(x) = u'(1-x) - \alpha u(1-x),\ \alpha = \bar{\alpha}\,, \tag{18}$$
$$u(0) - u(1) = 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1 Михайлов В.П. О базисах Рисса в $L^2(0,1)$ // ДАН СССР. – 1962. – Т. 144, № 5. – С. 981-984.

2 Кесельман Г.М. О безусловной сходимости разложений по собственным функциям некоторых дифференциальных операторов // Известия высших учебных заведений. Математика. – 1964. – № 2. – 39 с.

3 Латтес Р., Лионс Ж.-Л. Метод квазиобращения и его приложения. – М.: Мир , 1970. – 336 с.

4 Кальменов Т.Ш., Шалданбаев А.Ш. О структуре спектра краевой задачи Штурма – Лиувилля на конечном отрезке времени // Известия НАН РК. Серия физ.-мат. – 2000. – С. 29-34.

REFERENCES

1 Mihailov V.P. On Riesz bases in $L^2(0,1)$ // Reports of the Academy of Sciences of the USSR. – 1962. – Vol. 144, N 5. – P. 981-984. (Russian).

2 Keselman G.M. On the unconditional convergence of eigenfunction expansions of certain differential operators // Proceedings of Institutes of Higher Education. –1964. – Vol. 2, N 39. – P. 82-93. (Russian).

3 Lattes R., Lions J.-L. Method of quasiinvertion and its appendixes. – M.: Mir, 1970. – 336 p. (Russian).

4 Kalmenov T.Sh., Shaldanbaev A.Sh. About the structure of the spectrum for Sturm boundary value problem – Liouville at the finishing time interval // Izvestia RK NAS. Series phys.-math. – Almaty, 2000. – P. 29-34. (Russian).

Резюме

А. А. Көпжасарова, А. Ш. Шалданбаев

(М. О. Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті, Шымкент қ.)

ШЕКАРАЛЫҚ ШАРТТАРЫ ОНША ҚОЛАЙЛЫ ЕМЕС,

ШТУРМ–ЛИУВИЛЛЬ ЕСЕБІ ШЕШІМІНІҢ «СПЕКТРАЛЬДЫҚ» ЫДЫРАУЫ

Бұл еңбекте, шекаралық шарттары онша қолайлы емес, Штурм-Лиувилль есебі шешімінің спектральдық ыдырауы алынған.

Кілт сөздер: шарттары онша қолайлы емес жағдай, Штурм–Лиувилль операторы.

Summary

A. A. Kopzhasarova, A. Sh. Shaldanbayev

(M. Auezov South-Kazakhstan State University, Shymkent)

THE «SPECTRAL» SOLUTION EXPANSION OF THE STRUM–LIOUVILLE PROBLEM

WITH NOT STRONGLY REGULAR BOUNDARY CONDITIONS

In this paper, the spectral received of the solutions of the Sturm-Liouville problem with not strongly regular boundary conditions.

Keywords: не усиленно регулярны краевые условия, оператора Штурма–Лиувилля.

Поступила 3.04.2013г