Б. Д. КОШАНОВ

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧ ТИПА НЕЙМАНА ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

(Представлена академиком НАН РК Т. Ш. Кальменовым)

Найдены необходимые и достаточные условия разрешимости задач типа Неймана для бигармонического уравнения в шаре. Построена функция Грина задачи Неймана для одномерных дифференциальных операторов.

1. Необходимые и достаточные условия разрешимости задач типа Неймана для бигармонических уравнений в шаре. Рассмотрим бигармоническое уравнение

$$Lu \equiv \Delta^2 u(x) = f(x) \qquad (1.1)$$

в шаре $\Omega_r = \{x : \|x\| < r\} \subseteq R^n$, ($n$ – нечетное, а также при четных n, если $4 < n$).

Бигармоническое уравнение (1.1) является, как частным случаем полигармонического уравнения [1] $\Delta^m u(x) = f(x)$. В предыдущих исследованиях [2, 3] для уравнения (1.1) было построено решение следующей краевой задачи, т.е. задачи Дирихле

$$\left.\frac{\partial^i}{\partial n_x^i} u\right|_{x\in\partial\Omega_r} = 0, \quad i = 0,1. \qquad (1.2)$$

Единственное решение $u(x)$ имеет интегральное представление

$$u(x) = \int_{\Omega} G_{4,n}(x,y) f(y) dy, \qquad (1.3)$$

где $G_{4,n}(x,y)$ – функция Грина задачи Дирихле (1.1)–(1.2) может быть записана в виде:

$$G_{4,n}(x,y) = \frac{1}{(4-n)4\cdot(2-n)} \times$$

$$\times \frac{1}{\omega_n}\left[\left|x-y\right|^{4-n} - \left|x - \frac{y}{|y|^2} r^2\right|^{4-n} \left|\frac{y}{r}\right|^{4-n}\right] +$$

$$+ \frac{1}{2\cdot 4\cdot(2-n)} \cdot \frac{1}{\omega_n} \times$$

$$\times r^2 \left(1 - \left|\frac{y}{r}\right|^2\right)\left(1 - \left|\frac{x}{r}\right|^2\right)\left|x - \frac{y}{|y|^2} r^2\right|^{2-n} \left|\frac{y}{r}\right|^{2-n}. \qquad (1.4)$$

Для бигармонического уравнения (1.1) рассмотрим следующую задачу **К-12**:

$$Lu \equiv \Delta^2 u(x) = f(x),$$

$$x \in \Omega_r = \{x : \|x\| < r\} \subseteq R^n; \qquad (1.5)$$

$$\left.\frac{\partial^i}{\partial n_x^i} u\right|_{x\in\partial\Omega_r} = 0, \quad i = 1,2. \qquad (1.6)$$

Решение ищем в виде

$$u(x) = \int_{\Omega_r} \varepsilon_{4,n}(x,y) f(y) dy + \sum_{l=0}^{1} |x|^{2l} u_l(x) =$$

$$= \int_{\Omega_r} d_{4,n} |x-y|^{4-n} f(y) dy + u_0(x) + |x|^2 u_1(x), \qquad (1.7)$$

где $u_0(x), u_1(x)$ – гармонические функции в области Ω_r.

В силу краевых условий (1.6) получим:

$$\begin{cases} \int_{\Omega_r} d_{4,n} \dfrac{\partial}{\partial n_x} |x-y|^{4-n} f(y) dy + \dfrac{\partial}{\partial n_x} u_0(x) + \\ \qquad + 2|x| u_1(x) + |x|^2 \dfrac{\partial}{\partial n_x} u_1(x) = 0; \\ \int_{\Omega_r} d_{4,n} \dfrac{\partial^2}{\partial n_x^2} |x-y|^{4-n} f(y) dy + \dfrac{\partial^2}{\partial n_x^2} u_0(x) + \\ \quad + 4u_1(x) + 4|x| \dfrac{\partial}{\partial n_x} u_1(x) + |x|^2 \dfrac{\partial^2}{\partial n_x^2} u_1(x) = 0. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} \int\limits_{\Omega_r} d_{4,n}(4-n)|x-y|^{2-n}\left(|x|-\dfrac{(x,y)}{|x|}\right)f(y)dy + \\ \quad +\dfrac{\partial u_0(x)}{\partial n_x}+2|x|u_1(x)+|x|^2\dfrac{\partial u_1(x)}{\partial n_x}=0; \\ \int\limits_{\Omega_r} d_{4,n}(4-n)(2-n)|x-y|^{-n}\times \\ \quad \times\left(|x|-\dfrac{(x,y)}{|x|}\right)^2 f(y)dy+\dfrac{\partial^2 u_0(x)}{\partial n_x^2}+ \\ \quad +4u_1(x)+4|x|\dfrac{\partial u_1(x)}{\partial n_x}+|x|^2\dfrac{\partial^2}{\partial n_x^2}u_1(x)=0. \end{cases} \quad (1.8)$$

Интегрируя равенства (1.8) по сфере $\partial\Omega_r$ и учитывая следующие равенства

$$\int\limits_{\partial\Omega_r}\frac{\partial u_l}{\partial n_x^k}dS_x=\begin{cases}\omega_n u_l(0), & k=0\\ 0, & k>0\end{cases} \quad (1.9)$$

где ω_n – площадь сферы $\partial\Omega_r$, находим, что

$$\begin{cases} \int\limits_{|x|=r}\int\limits_{|y|<r} d_{4,n}(4-n)|x-y|^{2-n}\times \\ \quad \times\left(r-\dfrac{(x,y)}{r}\right)f(y)dydS_x+2r\omega_n \quad u_1(0)=0; \\ \int\limits_{|x|=r}\int\limits_{|y|<r} d_{4,n}(4-n)(2-n)|x-y|^{-n}\times \\ \quad \times\left(r-\dfrac{(x,y)}{r}\right)^2 f(y)dydS_x+4r\omega_n \quad u_1(0)=0. \end{cases} \quad (1.10)$$

Для того чтобы система уравнений (1.10) имела единственное решение, необходимо и достаточно, выполнялось условие

$$2r\omega_n u_1(0)(4-n)\times$$
$$\times\int\limits_{|x|=r}\int\limits_{|y|<r}\left[(2-n)|x-y|^{-n}\left(r-\frac{(x,y)}{r}\right)^2-\right.$$
$$\left.-2|x-y|^{2-n}\left(r-\frac{(x,y)}{r}\right)\right]f(y)dydS_x=0.$$

Так как $r,\omega_n,u_1(0),(4-n)$, каждые отдельно не могут быть равны нулю, поэтому получим

$$\int\limits_{|x|=r}\int\limits_{|y|<r}\left[(2-n)|x-y|^{-n}\left(r-\frac{(x,y)}{r}\right)^2-\right.$$
$$\left.-2|x-y|^{2-n}\left(r-\frac{(x,y)}{r}\right)\right]f(y)dydS_x=0. \quad (1.11)$$

Таким образом, получим следующую теорему

Теорема 1.1 *Необходимым и достаточным условием разрешимости задачи К-12, т.е. задачи (1.5)–(1.6) является условие (1.11).*

Теперь рассмотрим для бигармонического уравнения (1.1) следующую задачу **К-13**:

$$Lu\equiv\Delta^2 u(x)=f(x),$$
$$x\in\Omega_r=\{x:\|x\|<r\}\subseteq R^n; \quad (1.12)$$

$$\left.\frac{\partial^i}{\partial n_x^i}u\right|_{x\in\partial\Omega_r}=0, \quad i=1,3. \quad (1.13)$$

Решение ищем в виде (1.7), в силу краевых условий (1.13) получим:

$$\begin{cases} \int\limits_{\Omega_r} d_{4,n}\dfrac{\partial}{\partial n_x}|x-y|^{4-n}f(y)dy+\dfrac{\partial}{\partial n_x}u_0(x)+ \\ \quad +2|x|u_1(x)+|x|^2\dfrac{\partial}{\partial n_x}u_1(x)=0; \\ \int\limits_{\Omega_r} d_{4,n}\dfrac{\partial^3}{\partial n_x^3}|x-y|^{4-n}f(y)dy+\dfrac{\partial^3}{\partial n_x^3}u_0(x)+ \\ \quad +12\dfrac{\partial}{\partial n_x}u_1(x)+8|x|\dfrac{\partial^2}{\partial n_x^2}u_1(x)+|x|^2\dfrac{\partial^3}{\partial n_x^3}u_1(x)=0. \end{cases}$$

Отсюда, действуя аналогично предыдущей задаче, имеем

$$\begin{cases} \int\limits_{\Omega_r} d_{4,n}(4-n)|x-y|^{2-n}\left(|x|-\dfrac{(x,y)}{|x|}\right)f(y)dy+ \\ \quad +\dfrac{\partial u_0(x)}{\partial n_x}+2|x|u_1(x)+|x|^2\dfrac{\partial u_1(x)}{\partial n_x}=0; \\ \int\limits_{\Omega_r} d_{4,n}(4-n)(2-n)\left\{(-n)|x-y|^{-n-2}\left(|x|-\dfrac{(x,y)}{|x|}\right)^3+\right. \\ \quad \left.+3|x-y|^{-n}\left(|x|-\dfrac{(x,y)}{|x|}\right)\right\}f(y)dy+\dfrac{\partial^3 u_0(x)}{\partial n_x^3}+ \\ \quad +12\dfrac{\partial u_1(x)}{\partial n_x}+8|x|\dfrac{\partial^2 u_1(x)}{\partial n_x^2}+|x|^2\dfrac{\partial^3}{\partial n_x^3}u_1(x)=0. \end{cases} \quad (1.14)$$

$$\begin{cases} \int\limits_{|x|=r}\int\limits_{|y|<r} d_{4,n}(4-n)|x-y|^{2-n}(r-\frac{(x,y)}{r})\times \\ \qquad \times f(y)dydS_x + 2r\omega_n \quad u_1(0)=0; \\ \int\limits_{|x|=r}\int\limits_{|y|<r} \left\{-n|x-y|^{-n-2}(r-\frac{(x,y)}{r})^3 + \right. \\ \left. +3|x-y|^{-n}(r-\frac{(x,y)}{r})\right\} f(y)dydS_x = 0. \end{cases}$$

Отсюда получим следующее условие разрешимости задачи:

$$\begin{cases} u_1(0) = \int\limits_{|x|=r}\int\limits_{|y|<r} \frac{(4-n)d_{4,n}}{2r\omega_n}|x-y|^{2-n}\times \\ \qquad \times(r-\frac{(x,y)}{r})f(y)dydS_x; \\ \int\limits_{|x|=r}\int\limits_{|y|<r} \left\{-n|x-y|^{-n-2}(r-\frac{(x,y)}{r})^3 + \right. \\ \left. +3|x-y|^{-n}(r-\frac{(x,y)}{r})\right\} f(y)dydS_x = 0. \end{cases} \quad (1.15)$$

Теорема 1.2 *Необходимым и достаточным условием разрешимости задачи К-13, т.е. задачи (1.12)-(1.13) является условие (1.15).*

2. Построение функции Грина задачи Неймана на примере обыкновенных дифференциальных операторов. Понятие функции Грина вводится и для задачи Неймана, однако ее нахождение требует довольно сложных построений [1].

В данном пункте приведены два примера построению функции Грина задачи Неймана для одномерных дифференциальных операторов.

Пример 1. Для дифференциального оператора $L = -u''$ рассмотрим краевую задачу L_N:

$$-u''(x) = f(x),\ 0<x<1; \quad (2.1)$$

$$u'(0) = u'(1) = 0, \quad (2.2)$$

где $f(x) \in L_2(0,1)$.

Решение ищем в виде

$$L_N^{-1}f(x) = u(x) = \quad (2.3)$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^x (x-t)f(t)dt - \frac{1}{2}\int_x^1 (t-x)f(t)dt + C_1 + C_2 x.$$

$$u'(x) = -\frac{1}{2}\int_0^x f(t)dt + \frac{1}{2}\int_x^1 f(t)dt + C_2,$$

$$u'(0) = 0, \quad C_2 = -\frac{1}{2}\int_0^1 f(t)dt$$

$$u'(1) = -\frac{1}{2}\int_0^1 f(t)dt + C_2 =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 f(t)dt - \frac{1}{2}\int_0^1 f(t)dt = -\int_0^1 f(t)dt = 0,$$

$$C_2 = 0.$$

Отсюда получим дополнительное условие на правую часть (2.1)

$$\int_0^1 f(t)dt = 0. \quad (2.4)$$

Так как произвольная постоянная $C_1 = C_1(f)$ – линейный непрерывный функционал, то по теореме Рисса функционал представляется в виде

$$C_1 = \int_0^1 \sigma(t) f(t)dt, \forall \sigma(t) \in L_2(0,1).$$

Тогда *неоднозначное решение* задачи (2.1)–(2.2) имеет вид

$$L_N^{-1}f(x) = u(x) = -\frac{1}{2}\int_0^x (x-t)f(t)dt -$$

$$-\frac{1}{2}\int_x^1 (t-x)f(t)dt + \int_0^1 \sigma(t)\quad f(t)dt, \quad (2.5)$$

где $\sigma(x) \in L_2(0,1)$, причем для $f(x) \in L_2(0,1)$ выполняется дополнительное условие (2.4).

Для того чтобы однозначно определить решение поступим следующим образом:

Интегрируем решение (2.5):

$$\int_0^1 u(x)dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 dx\int_0^x (x-t)f(t)dt -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^1 dx\int_0^x (t-x)f(t)dt + \int_0^1 C_1 dx = 0.$$

Отсюда получим

$$C_1 = \frac{1}{2}\int_0^1 f(t)dt[\frac{(1-t)^2}{2} - \frac{t^2}{2}] = -\frac{1}{2}\int_0^1 t\,f(t)dt. \quad (2.6)$$

Теорема 2.1 *Пусть* $f \in L_2(\Omega)$ *и удовлетворяет условию* $\int_0^1 f(t)dt = 0$. *Тогда решение задачи Неймана (2.1)–(2.2) существует и имеет вид*

$$L_N^{-1} f(x) = u(x) = -\frac{1}{2}\int_0^x (x-t) f(t)dt - \\ -\frac{1}{2}\int_x^1 (t-x) f(t)dt - \frac{1}{2}\int_0^1 t \quad f(t)dt, \qquad (2.7)$$

причем выполняется условие $\int_0^1 u(t)dt = 0$.

Замечание. *При выполнении условия (2.4) функция Грина задачи Неймана, (2.1)–(2.2) определяется однозначно:*

$$G_N(x,t) = \varepsilon(x-t) - \frac{1}{2}t \quad . \qquad (2.8)$$

Пример 2. Для дифференциального оператора $L = -u^{(IV)}$ рассмотрим краевую задачу L_N:

$$Lu \equiv -u^{(IV)}(x) = f(x),\ x \in \Omega = (-1,1); \quad (2.9)$$

$$u''(-1) = u''(1) = 0;$$

$$u'''(-1) = u'''(1) = 0. \qquad (2.10)$$

где $f(x) \in L_2(0,1)$.

Так как фундаментальное решение уравнения (2.9) имеет вид:

$$\varepsilon_{4,1}(x-t) = -\frac{1}{12}|x-t|^3, \qquad (2.11)$$

тогда общее решение уравнения (2.9) можно искать в форме

$$u(x) = \int_{-1}^1 \varepsilon_{4,1}(x,t) f(t)dt + c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3, \qquad (2.12)$$

где $c_i = \int_{-1}^1 \sigma_i(t) f(t)dt, \quad \forall \sigma_i(t) \in L_2(-1,1)$, $i = \overline{1,4}$.

Учитывая краевые условия (2.10) получим:

$$\begin{cases} 6c_4 = 0 \Rightarrow c_4 = 0 \\ \int_{-1}^1 \frac{1}{2} f(t)dt = 0 \\ 2c_3 - 6c_4 = 0 \Rightarrow c_3 = 0 \\ \int_{-1}^1 \frac{1}{2}(1-t) f(t)dt = 0 \end{cases}$$

Отсюда получим, что

$$(f,1) = 0, \ \ (f,1-t) = 0, \qquad (2.13)$$

c_1, c_2 – свободные постоянные.

Таким образом, неоднозначное решение задачи (2.9)–(2.10) имеет вид:

$$L_N^{-1} f(x) = u(x) = -\frac{1}{12}\int_{-1}^x (x-t)^3 f(t)dt - \\ -\frac{1}{12}\int_x^1 (t-x)^3 f(t)dt + C_1 + C_2 x. \quad (2.14)$$

Для того чтобы обеспечить однозначность решения поступим следующим образом:

Интегрируем (2.14)

$$\int_{-1}^1 u(x)dx = -\frac{1}{12}\int_{-1}^1 dx \int_{-1}^x (x-t)^3 f(t)dt - \\ -\frac{1}{12}\int_{-1}^1 dx \int_x^1 (t-x) f(t)dt + \int_{-1}^1 C_1 dx + \int_{-1}^1 C_2 x dx = 0.$$

заменяя порядок интегрирования имеем:

$$C_1 = \frac{1}{48}\int_{-1}^1 [1 + 6t^2 + t^4] f(t)dt. \qquad (2.15)$$

Решение (2.14) умножим на x и интегрируем по области:

$$\int_{-1}^1 x u(x)dx = -\frac{1}{12}\int_{-1}^1 x dx \int_{-1}^x (x-t)^3 f(t)dt - \\ -\frac{1}{12}\int_{-1}^1 x dx \int_x^1 (t-x) f(t)dt + \\ + \int_{-1}^1 C_1 x dx + \int_{-1}^1 C_2 x^2 dx = 0.$$

Отсюда получим:

$$C_2 = \frac{1}{160}\int_{-1}^1 [(1-t)^4(4-9t) + (1+t)^4(t-1)] f(t)dt.$$

Теорема 2.2 *Пусть* $f \in L_2(-1,1)$ *и удовлетворяет условиям:* $\int_0^1 f(t)dt = 0$, $\int_0^1 tf(t)dt = 0$. *Тогда решение задачи Неймана (2.9)–(2.10) существует и имеет вид*

$$u(x) = -\frac{1}{12}\int_{-1}^{x}(x-t)^3 f(t)dt - \frac{1}{12}\int_{x}^{1}(t-x)^3 f(t)dt + \frac{1}{48}\int_{-1}^{1}[1+6t^2+t^4]f(t)dt + \frac{1}{160}x\int_{-1}^{1}[(1-t)^4(4-9t)+(1+t)^4(t-1)]f(t)dt,$$

причем выполняются условия: $\int_0^1 u(t)dt = 0$, $\int_0^1 tu(t)dt = 0$.

Замечание. *При выполнений условий (2.13) функция Грина задачи Неймана, (2.9)–(2.10) определяется однозначно:*

$$G_N(x,t) = -\frac{1}{12}|x-t|^3 + \frac{1}{48}[1+6t^2+t^4] + \frac{1}{160}x[(1-t)^4(4-9t)+(1+t)^4(t-1)]. \quad (2.16)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бицадзе А.В.* О некоторых свойствах полигармонических функций // Дифференциальные уравнения. 1988. Т. 24, № 5. С. 825-831.

2. *Кальменов Т.Ш., Кошанов Б.Д., Немченко М.Ю.* Представление функции Грина задачи Дирихле для полигармонических уравнений в шаре // Доклады Российской академии наук. 2008. Т. 421, № 3. С. 305-307.

3. *Кальменов Т.Ш., Кошанов Б.Д., Искакова У.А.* Структура спектра краевых задач для дифференциальных уравнений. Алматы: Препринт, 2005. 54 с.

4. *Кошанов Б.Д.* О свойствах функции Грина задачи Дирихле для полигармонических уравнений в шаре // Вестник КазНУ. Сер. математика, механика, информатика. 2007. № 1(52). 17-23 с.

Резюме

Бигармоникалық теңдеулер үшін Нейман типтес есептердің шешілуінің қажетті және жеткілікті шарттары көп өлшемді кеңістік шарында табылды. Бір өлшемді дифференциалдық операторлар үшін Нейман есебінің Грин функциясы құрастырылды.

Summary

In this article the necessary and sufficient problem solvability conditions for the Neumann biharmonic equation in ball have found. The Green's function oh the Neumann problem for one-dimensional differential operator was built.

Институт математики
КН МОН РК

Поступила 23.02.10г.