М. Д. КОШАНОВА

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОИСТВА НЕЛОКАЛЬНОЙ ПО ВРЕМЕНИ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТИПА С.Л.СОБОЛЕВА

(Представлена академиком НАН РК Т. Ш. Кальменовым)

Изучаются линейные нелокальные задачи для уравнения типа С.Л.Соболева. Получены формулы резольвент для данного дифференциального оператора, а также получены представления на разность резольвент.

Рассмотрим в $L_2[0,c]$ и $L_2[c,b]$ два формально самосопряженных дифференциальных выражения

$$l^-(y)=\left(p_0^- y^{(\mu)}(x)\right)^{(\mu^-)}\left(p_1^- y^{(\mu^- -1)}(x)\right)^{(\mu^- -1)}+$$

$$+\ldots+\left(p_{\mu^- -1}^- y'(x)\right)'+p_{\mu-}^- \cdot y(x),$$

и

$$l^+(y)=\left(p_0^+ y^{(\mu^+)}(x)\right)^{(\mu+)}\left(p_1^+ y^{(\mu^+ -1)}(x)\right)^{(\mu^+ -1)}+$$

$$+\ldots+\left(p_{\mu^+ -1}^+ y'(x)\right)'+p_{\mu+}^+ \cdot y(x),$$

где $p_{\mu^\pm}^\pm,\ldots,p_0^\pm$ – вещественнозначные достаточное число раз дифференцируемые на $I^\pm$ функции, $\mu^\pm$ – натуральные числа, $I^-=[0;c]$,

$I^+ = [c;b]$. Фиксируем $0 < c < b < \infty$. Допускается случай $\mu^+ \neq \mu^-$.

Введем максимальный оператор $L_{\max}$, порождаемые заданными дифференциальными выражениями $l^+(\cdot)$ и $l^-(\cdot)$ в пространстве $L_2(o,b)$. Для этого обозначим через $D_{\max}$ совокупность всех функций $y(x)$ из $L_2(o,b)$, все производные которых до $(2\mu^\pm - 1)$ -ого порядка включительно абсолютно непрерывна на $I^\pm$, а производная $2\mu^\pm$-го порядка принадлежит пространству $L_2[I^\pm]$. Известно, что $D_{\max}$ – линейное многообразие в пространстве $L_2[0;b]$. Оператор $L_{\max}$ в $L_2(0,b)$ определим следующим образом: область определения оператора $L_{\max}$ есть $D_{\max}$ и для всех $y(x) \in D_{\max}$ действие оператора $L_{\max}$ зададим по формуле $L_m y(x) = l^\pm(y(x))$ при $x \in I^\pm$. Наряду с $L_{\max}$ нам понадобится так называемый минимальный оператор $L_{\min}$ в пространстве $L_2[0;b]$, порождаемые дифференциальными выражениями $l^\pm(y)$. Обозначим через $D_{\min}$ совокупность всех функций $y(x)$ из $D_{\max}$, удовлетворяющих условиям

$$y^{(k)}(0) = y^{(k)}(c-0), k = 0,1,...,2\mu^- - 1,$$

$$y^{(m)}(c+0) = y^{(m)}(b), m = 0,1,...,2\mu^+ - 1.$$

Пусть $L_{\min}$ означает сужение $L_{\max}$ на $D_{\min}$, т.е. если $y(x) \in D_{\min}$, то $L_{\min} y(x) = L_{\max} y(x)$ или $L_{\min} \subset L_{\max}$.

В статье [3] были перечислены некоторые свойства оператора $L_{\min}$. Здесь продолжим спектральные свойства оператора $L_{\min}$.

1. ПРИМЕРЫ

1) Случай отсутствия связи.

Пусть $z_1^-(x), z_2^-(x),..., z_{2\mu^-}^-(x)$ – ортонормированная система решений однородного дифференциального уравнения порядка $2\mu^-$:

$$l^-(z) = iz(x), 0 < x < c, i = \sqrt{-1}.$$

Точно также $z_1^+(x), z_2^+(x),..., z_{2\mu^+}^+(x)$ ортонормированная система решений однородного уравнения порядка $2\mu^+$:

$$l^+(z) = iz(x), c < x < b, i = \sqrt{-1}.$$

Через $\vartheta_1^\pm(x), \vartheta_2^\pm(x),..., \vartheta_{2\mu^\pm}^\pm(x)$ обозначена ортонормированная система решений однородного дифференциального уравнения

$$l^\pm(\vartheta_j^\pm(x)) = i\vartheta_j^\pm(x), x \in I^\pm.$$

Тогда система образует ортонормированную в R_+ систему $\{\varphi_r(x)\}_{r=1}^{2M}$, определяемую по формулам

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} z_j^-(x), при 0 < x \le c, \\ 0, при c < x \le b, \end{cases} \quad j = 1,...,2\mu^-$$

$$\varphi_{j+2\mu^-}(x) = \begin{cases} 0, при 0 < x \le c, \\ z_j^+(x), при c < x \le b, \end{cases} \quad j = 1,...,2\mu^+$$

Точно также система $\{\psi_r(x)\}_{r=1}^{2M}$, где

$$\psi_j(x) = \begin{cases} \vartheta_j^-(x), при 0 < x \le c, \\ 0, при c < x \le b, \end{cases} \quad j = 1,...,2\mu^-$$

$$\psi_{j+2\mu^-}(x) = \begin{cases} 0, при 0 < x \le c, \\ \vartheta_j^+(x), при c < x \le b, \end{cases} \quad j = 1,...,2\mu^+$$

образует ортонормированный базис в R_{-}. Тогда базисы $\{W_r^\pm(x)\}$ будут иметь вид

$$W_r^+(x) = \frac{1}{2}(\psi_r(x) + \varphi_r(x)),$$

$$W_r^-(x) = \frac{1}{2i}(\psi_r(x) - \varphi_r(x)),$$

причем $\sup pW_r^+ = \sup pW_r^- = [0,c]$ при $1 \le r \le 2\mu^-$ и $\sup pW_r^+ = \sup pW_r^- = [c,b]$ при $2\mu^- + 1 \le r \le 2\mu^- + 2\mu^+$.

Эрмитову матрицу Г удобно представить в виде блочной матрицы

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix}$$

где γ_{11} – квадратная матрица размерности $(2\mu^-)$; γ_{22} – квадратная матрица размерности $(2\mu^+)$; $\gamma_{12} = \gamma_{21}^*$ – прямоугольная матрица размерности $(2\mu^-) \times (2\mu^+)$.

Если выбрать $\gamma_{12} = \gamma_{21}^* = 0$, то самосопряженное расширение L_Γ совпадает с оператором, который представляет прямую сумму самосопряженных операторов A_- и A_+, где A_- – есть самосопряженное расширение, порождаемое операцией $l^-(\cdot)$ в пространстве $L_2[0;c]$. Таким образом, если эрмитова матрица

$$\Gamma_\Phi = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & 0 \\ 0 & \gamma_{22} \end{pmatrix},$$

то соответствующий самосопряженный оператор L_{Γ_Φ} есть сумма независимых друг от друга самосопряженных операторов, один из которых задан на отрезке $(0,c)$, а другой (c,b). Ясно, что область $(0,b)$ составлена из двух частей $(0,c)$ и (c,b) и на разных участках задаются разного порядка дифференциальные уравнения со своими краевыми условиями. Если $\gamma_{12} = \gamma_{21}^* = 0$, то связи между дифференциальными уравнениями на разных участках и их краевыми условиями нет. В случае произвольных $\gamma_{12} = \gamma_{21}^*$ появляется слабая связь через краевые условия. В дальнейшем покажем, что спектральные свойства в такой составной области определяются спектральными свойствами «локальных» операторов и качеством каналов связи.

2) Случай слабой связи.

Произвольную эрмитову матрицу Г можно представить в виде

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & 0 \\ 0 & \gamma_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & 0 \end{pmatrix} = \Gamma_\Phi + \Gamma_B .$$

Следовательно, области определении самосопряженных расширении и связаны между собой соотношением

$$y(x) = y_\Phi + \vec{W}^-(x) \cdot \Gamma_B \vec{\xi}^+ ,$$

где $y(x)$ – произвольный элемент $D(L_\Gamma)$, $y_\Phi(x)$ – некоторый элемент $D(L_{\Gamma_\Phi})$, причем $y_\Phi(x)$ имеет вид

$$y_\Phi(x) = \tilde{y}(x) + \vec{W}^-(x) \cdot \Gamma_\Phi \vec{\xi}^+ + \vec{W}^+(x) \vec{\xi}^+ ,$$

с некоторым числовым вектором $\vec{\xi}^+$ и некоторым элементом $\tilde{y}(x)$ из $D_{\min}$. Применим к обеим частям соотношения $y(x) = y_\Phi + \vec{W}^-(x) \cdot \Gamma_B \vec{\xi}^+$ оператор $L_{\max}$, тогда приходим к равенству

$$L_{\max} y(x) = L_{\max} y_\Phi(x) + L_{\max} \vec{W}^-(x) \cdot \Gamma_B \vec{\xi}^+ ,$$

или

$$L_\Gamma y(x) = L_{\Gamma_\Phi} y(x) + \vec{W}^+(x) \cdot \Gamma_B \vec{\xi}^\pm .$$

2. Резольвента самосопряженного расширения.

В данном пункте L_{Γ_Φ} для краткости будем обозначать через L_Φ. Заметим, что L_Φ самосопряженное расширение $L_{\min}$, причем отсутствует связь между дифференциальными выражениями $l^+(\cdot)$ и $l^-(\cdot)$ и соответствующими краевыми условиями, задающими операторы на отрезках $[0,c]$ и $[c,b]$. То есть можно находить резольвенты в $L_2[0,c]$ и $L_2[c,b]$. Так что в дальнейшем будем считать, что резольвента $(L_\Phi - \lambda I)^{-1}$ известна. Нам надо выписать резольвенту $(L_\Gamma - \lambda I)^{-1}$, где L_Γ имеет краевые условия со слабой связью.

Предварительно изучим некоторые свойства оператора L_Φ.

Лемма 1. Справедливо соотношение

$$\psi_r(x) = \varphi_r - 2i(L_\Phi + iI)^{-1} \varphi_r , \quad r = 1,\ldots,2M .$$

Доказательство. Из того, что $L_{\max}\varphi_r = i\varphi_r$ надо получить $L_{\max}\psi_r = -i\psi_r$.

Лемма 1. Справедливо соотношение

$$\psi_r(x) = \varphi_r - 2i(L_\Phi + iI)^{-1} \varphi_r , \quad r = 1,\ldots,2M .$$

Доказательство. Из того, что $L_{\max}\varphi_r = i\varphi_r$ надо получить $L_{\max}\psi_r = -i\psi_r$.

Поэтому рассмотрим $L_{\max}\psi_r$ и преобразуем

$$L_{\max}\psi_r(x) = L_{\max}\varphi_r - 2iL_{\max}(L_\phi + iI)^{-1}\varphi_r =$$

$$= i\varphi_r - 2iL_\Phi(L_\phi + iI)^{-1}\varphi_r =$$

$$= i\varphi_r - 2i(L_\phi + iI - iI)(L_\phi + iI)^{-1}\varphi_r =$$

$$= i\varphi_r - 2i\varphi_r + 2(L_\phi + iI)^{-1}\varphi_r =$$

$$= -i\left(\varphi_r - 2i(L_\phi + iI)^{-1}\varphi_r\right) = -i\psi .$$

Теперь проверим, что $\{\psi_r(x)\}_1^{2M}$ ортонормированная система, если такова система $\{\varphi_r(x)\}_1^{2M}$. Действительно, преобразуем скалярное произведение согласно цепочке равенств

$$<\psi_p,\psi_r>=$$

$$<\varphi_r-2i(L_\phi+iI)^{-1}\varphi_r,\varphi_p-2i(L_\phi+iI)^{-1}\varphi_p>=$$

$$=<\varphi_r,\varphi_p>-2i<\varphi_r,$$

$$\left[(L_\phi-iI)^{-1}-(L_\phi+iI)^{-1}-2i(L_\phi-iI)^{-1}(L_\phi+iI)^{-1}\varphi_p\right]$$

Ясно, что справедливо операторное тождество гильберта

$$(L_\phi-iI)^{-1}-(L_\phi+iI)^{-1}=+2i(L_\phi-iI)^{-1}(L_\phi+iI)^{-1}$$

для проверки которого надо умножить обе части на $(L_\phi-iI)(L_\phi+iI)$. Следовательно, верны равенства $<\psi_p,\psi_r>=<\varphi_r,\varphi_p>$ при всех допустимых индексах r и p.

Следствие. Справедливы представления

$$W_r^-(x)=(L_\phi+iI)^{-1}\varphi_r,$$

$$W_r^+(x)=L_\phi(L_\phi+iI)^{-1}\varphi_r,$$

некоторые непосредственно вытекают из леммы 1.

Таким образом, если известно одно самосопряженное расширение L_ϕ, то базисы $\{W_r^-(x)\}_1^{2M}$ и $\{W_r^+(x)\}_1^{2M}$ можно согласно приведенному следствию выразит через единый базис $\{\varphi_r(x)\}_1^{2M}$.

Теперь мы готовы для того, чтобы выписать резольвенту $(L_\Gamma-\lambda I)^{-1}$.

Рассмотрим операторное неоднородное уравнение

$$L_\Gamma y(x)-\lambda y(x)=f(x). \qquad (1)$$

Решение уравнения (1) ищем в виде

$$y(x)=\tilde{y}(x)+\sum_{r=1}^{2M}\left[\xi_r^+(y)W_r^+(x)+\xi_r^-(y)W_r^-(x)\right], \qquad (2)$$

где $\xi_r^+(y)$ – некоторое число, а числа $\{\xi_r^-(x)\}_1^{2M}=\Gamma\cdot\{\xi_r^+(x)\}_1^{2M}$. Причем $\tilde{y}(x)$ – элемент из $D_{\min}$. Обозначим через $\tilde{\vartheta}(x)=(L_\phi+iI)\tilde{y}(x)$. Тогда $\tilde{\vartheta}(x)\perp R_{+i}$, так как

$$<\tilde{\vartheta}(x),\varphi_r(x)>=<(L_\phi+iI)\tilde{y}(x);\varphi_r(x)>=$$

$$=<\tilde{y}(x);(L_\phi-iI)\varphi_r(x)>=0$$

при всех допустимых индексах r. Представлению (2) согласно следствию можно придать вид

$$y(x)=(L_\phi+iI)^{-1}\tilde{\vartheta}(x)+$$

$$+\sum_{r=1}^{2M}\Big(\xi^+L_\phi(L_\phi+iI)^{-1}\varphi_r(x)+$$

$$+(\Gamma\vec{\xi}^+)_r(L_\phi+iI)^{-1}\varphi_r(x)\Big), \qquad (3)$$

которое подставим в уравнение (1). В результате имеем равенство

$$(L_\Gamma-\lambda I)(L_\phi+iI)^{-1}\tilde{\vartheta}(x)+$$

$$+\sum_{r=1}^{2M}\Big(\xi_r^+(L_\Gamma-\lambda I)\big(L_\Phi(L_\phi+iI)^{-1}\big)\varphi_r(x)+$$

$$+(\Gamma\vec{\xi}^+)_r(L_\Gamma-\lambda I)(L_\phi+iI)^{-1}\varphi_r(x)\Big)=f(x).$$

Так как $L_{\min}\subset L_\Gamma\subset L_{\max}$, то перепишем последнее равенство в виде

$$(L_{\min}-\lambda I)(L_\phi+iI)^{-1}\tilde{\vartheta}(x)+$$

$$+\sum_{r=1}^{2M}\Big(\xi_r^+(L_{\max}-\lambda I)\big(L_\Phi(L_\phi+iI)^{-1}\big)\varphi_r(x)+$$

$$+(\Gamma\vec{\xi}^+)_r(L_{\max}-\lambda I)(L_\phi+iI)^{-1}\varphi_r(x)\Big)=f(x).$$

Теперь используем то, что $L_\phi\subset L_{\max}$. В результате имеем

$$(L_{\min}-\lambda I)(L_\phi+iI)^{-1}\tilde{\vartheta}(x)+$$

$$\sum_{r=1}^{2M}\Big(\xi_r^+\big((L_{\max}-\lambda I)\varphi_r(x)-2iL_\phi(L_\phi+iI)^{-1}\varphi_r(x)\big)+$$

$$+(\Gamma\vec{\xi}^+)_r\cdot(L_\phi-\lambda I)(L_\phi+iI)^{-1}\varphi_r(x)\Big)=f(x)$$

или

$$(L_\phi-\lambda I)(L_\phi+iI)^{-1}\tilde{\vartheta}(x)+$$

$$+\sum_{r=1}^{2M}\Big(\xi_r^+\big(-(i-\lambda)\varphi_r(x)-2(L_\phi+iI)^{-1}\varphi_r(x)\big)+$$

$$+(\Gamma\vec{\xi}^+)_r\big(\varphi_r(x)-(i+\lambda)(L_\phi+iI)^{-1}\varphi_r(x)\big)\Big)=f(x) \qquad (4)$$

Умножим обе части уравнения (4) на

$$\left(L_\phi - \lambda I\right)^{-1}\left(L_\phi + iI\right) = \left(L_\phi + iI\right)\left(L_\phi - \lambda I\right)^{-1},$$

тогда

$$\widetilde{\vartheta}(x) + \sum_{r=1}^{2M}\Big(\xi_r^+\Big(-i\left(L_\phi - iI\right)\left(L_\phi - \lambda I\right)^{-1}\varphi_r(x) -$$

$$-\lambda\left(L_\phi + iI\right)\left(L_\phi - \lambda I\right)^{-1}\varphi_r(x)\Big) +$$

$$+\left(\Gamma\vec{\xi}^+\right)_r\Big(\left(L_\phi + iI\right)\left(L_\phi - \lambda I\right)^{-1}\varphi_r(x) -$$

$$-(i+\lambda)\left(L_\phi - \lambda I\right)^{-1}\varphi_r(x)\Big)\Big) =$$

$$= \left(L_\phi + iI\right)\left(L_\phi - \lambda I\right)^{-1} f(x). \qquad (5)$$

С учетом того, что $\widetilde{\vartheta}(x) \perp R_i$, т.е. умножим скалярно обе части соотношения (5) на $\varphi_p(x)$. В результате имеем систему линейных алгебраических чисел $\left\{\xi_1^+, \xi_2^+, \ldots, \xi_{2M}^+\right\}$.

$$\sum_{r=1}^{2M}\Big(\xi_r^+ \cdot < -i\left(L_\phi - iI\right)\left(L_\phi - \lambda I\right)^{-1}\varphi_r(x) -$$

$$-(i+\lambda)\left(L_\phi - \lambda I\right)^{-1}\varphi_r(x); \varphi_p(x) >\Big) = \qquad (6)$$

$$=< \left(L_\phi + iI\right)\left(L_\phi - \lambda I\right)^{-1} f(x); \varphi_p(x) >, \; p = 1, \ldots, 2M.$$

Следовательно, надо из системы линейных алгебраических уравнений (6) надо сначала найти числа $\left\{\xi_1^+, \xi_2^+, \ldots, \xi_{2M}^+\right\}$, а затем из (5) можно определить $\widetilde{\vartheta}(x)$. Формула резольвенты получается подстановкой найденных $\widetilde{\vartheta}(x)$ и $\left\{\xi_1^+, \xi_2^+, \ldots, \xi_{2M}^+\right\}$ в правую часть соотношения (3). Выпишем аккуратно формулу резольвенты. Для этого введем обозначения.

$$c_{rp} =< -i\left(L_\phi - iI\right)\left(L_\phi - \lambda I\right)^{-1}\varphi_r(x) -$$

$$-\lambda\left(L_\phi + iI\right)\left(L_\phi - \lambda I\right)^{-1}\varphi_r(x); \varphi_p(x) >=$$

$$-(i+\lambda) < \varphi_r \varphi_p > -\left(\lambda^2 + 2\lambda i + 1\right) <$$

$$< \left(L_\phi - \lambda I\right)^{-1}\varphi_r(x), \varphi_p(x) >,$$

$$d_{rp} =< \left(L_\phi + iI\right)\left(L_\phi - \lambda I\right)^{-1}\varphi_r(x) -$$

$$-(i+\lambda)\left(L_\phi - \lambda I\right)^{-1}\varphi_r(x); \varphi_p(x) >=< \varphi_r, \varphi_p >$$

$$b_{rp} =< \left(L_\phi + iI\right)\left(L_\phi - \lambda I\right)^{-1} f(x); \varphi_p(x) >$$

$$a_r(x) = -i\left(L_\phi - iI\right)\left(L_\phi - \lambda I\right)^{-1}\varphi_r(x) -$$

$$-\lambda\left(L_\phi + iI\right)\left(L_\phi - \lambda I\right)^{-1}\varphi_r(x); \varphi_p(x) =$$

$$= -i\Big(\left(L_\phi - \lambda I\right) + (\lambda - i)I\Big)\left(L_\phi - \lambda I\right)^{-1}\varphi_r(x) -$$

$$-\lambda\Big(\left(L_\phi - \lambda I\right) + (\lambda + i)I\Big)\left(L_\phi - \lambda I\right)^{-1}\varphi_r(x) =$$

$$= -(i+\lambda)\varphi_r(x) - \left(\lambda^2 + 2\lambda i + 1\right)\left(L_\phi - \lambda I\right)^{-1}\varphi_r;$$

$$q_r(x) = \left(L_\phi + iI\right)\left(L_\phi - \lambda I\right)^{-1}\varphi_r(x) -$$

$$-(i+\lambda)\left(L_\phi - \lambda I\right)^{-1}\varphi_r(x) = \varphi_r(x);$$

$$K(x) = \left(L_\phi + iI\right)\left(L_\phi - \lambda I\right)^{-1} f(x),$$

$$C = [c_{rp}], D = [d_{rp}], B = [b_{rp}],$$

$$A = [a_r(x)], Q = [q_r(x)],$$

Тогда система (6) может быть записана в матрично-векторной форме

$$\left(C + D\Gamma\right)\vec{\xi}^+ = B, \qquad (7)$$

Аналогичная запись соотношения (5) примет вид

$$\widetilde{\vartheta}(x) = K(x) - \left(A + Q\Gamma\right)\vec{\xi}^+, \qquad (8)$$

Условие разрешимости системы (7) запишем в виде

$$\det\left(C + D\Gamma\right)(\lambda) \neq 0, \qquad (9)$$

Итак, если выполняется (9) и $\exists\left(L_\phi - \lambda I\right)^{-1}$, то резольвента $\left(L_\Gamma - \lambda I\right)^{-1}$ имеет вид

$$\left(L_\Gamma - \lambda I\right)^{-1} f(x) = \left(L_\phi - \lambda I\right)^{-1} f(x) -$$

$$-\left(L_\phi + \lambda I\right)^{-1}\left(A + Q\Gamma\right)\left(C + D\Gamma\right)^{-1} B + \qquad (10)$$

$$+\vec{W}^+(x)\left(C + D\Gamma\right)^{-1} B + \vec{W}^-(x)\Gamma\left(C + D\Gamma\right)^{-1} B.$$

Те комплексные значения параметра λ, при которых выполняется (9), называются резольвентными значениями параметра L_Γ. В противном случае, λ означает элемент спектра оператора L_Γ. Таким образом, спектр самосопряженного расширения L_Γ представляет множество

$$Б\left(L_\Gamma\right) = \left\{\lambda : \det\left(C + D\Gamma\right) = 0\right\}.$$

3. Сравнение резольвент при разных граничных матрицах Г.

Представим эрмитову матрицу Г в блочном виде

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix},$$

где $\gamma_{11} = \gamma_{11}^*, \gamma_{12}^* = \gamma_{21}, \gamma_{22} = \gamma_{22}^*$.

Для удобства разложим $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, где

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & 0 \\ 0 & \gamma_{22} \end{pmatrix}, \ \Gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & 0 \end{pmatrix}.$$

Считаем, что γ_{11} – квадратная матрица размерности $(2\mu^-)$, γ_{22} – квадратная матрица размерности $(2\mu^+)$.

Запишем согласно (10) резольвенту расширения L_{Γ_1}.

$$\begin{aligned}(L_{\Gamma_1} - \lambda I)^{-1} f(x) &= (L_\phi - \lambda I)^{-1} f(x) + \\ &+ (L_\phi + \lambda I)^{-1}(A + Q\Gamma_1)(C + D\Gamma_1)^{-1} B + \\ &+ L_\phi (L_\phi + \lambda I)^{-1} \vec{\Phi}(x)(C + D\Gamma)^{-1} B + \\ &+ (L_\phi + \lambda I)^{-1} \vec{\Phi}(x)\Gamma(C + D\Gamma)^{-1} B, \quad (11)\end{aligned}$$

а также резольвенту расширения $L_{\Gamma_1+\Gamma_2} = L_\Gamma$.

$$\begin{aligned}(L_\Gamma - \lambda I)^{-1} f(x) &= (L_\phi - \lambda I)^{-1} f(x) + (L_\phi + \lambda I)^{-1} \\ &\times (A + Q\Gamma_1 + Q\Gamma_2)(C + D\Gamma_1 + D\Gamma_2)^{-1} B + \quad (12) \\ &+ L_\phi (L_\phi + \lambda I)^{-1} \vec{\Phi}(x)(C + D\Gamma_1 + C\Gamma_2)^{-1} B + \\ &+ (L_\phi + \lambda I)^{-1} \vec{\Phi}(x)(\Gamma_1 + \Gamma_2)(C + D\Gamma_1 + C\Gamma_2)^{-1} B.\end{aligned}$$

Считаем, что $\exists (C + D\Gamma_1)^{-1}$. Тогда справедливо представление для обратной матрицы

$$\begin{aligned}&(C + D\Gamma_1 + D\Gamma_2)^{-1} = \\ &= \left[\left(I + D\Gamma_2 (C + D\Gamma_1)^{-1}\right)(C + D\Gamma_1)\right]^{-1} = \\ &(C + D\Gamma_1)^{-1} \cdot \left(I + D\Gamma_2 (C + D\Gamma_1)^{-1}\right)^{-1} = \\ &= (C + D\Gamma_1)^{-1} \left[I + \left(\left(I + D\Gamma_2 (C + D\Gamma_1)^{-1}\right)^{-1} - I\right)\right] = \\ &= (C + D\Gamma_1)^{-1} + \\ &+ (C + D\Gamma_1)^{-1} \left[\left(I + D\Gamma_2 (C + D\Gamma_1)^{-1}\right)^{-1} - I\right]. \quad (13)\end{aligned}$$

Подставим равенство (13) в соотношении (12) и учтем (11), в результате получаем

$$\begin{aligned}&(L_\Gamma - \lambda I)^{-1} f(x) = (L_{\Gamma_1} - \lambda I)^{-1} f(x) + \\ &+ (L_\phi + \lambda I)^{-1} Q\Gamma_2 (C + D\Gamma_1 + D\Gamma_2)^{-1} B + \\ &+ (L_\phi + iI)^{-1} (A + Q\Gamma_1)(C + D\Gamma_1)^{-1} \times \\ &\times \left[\left(I + D\Gamma_2 (C + D\Gamma_1)^{-1}\right)^{-1} - I\right] + \\ &+ L_\phi (L_\phi + iI)^{-1} \vec{\Phi}(x)(C + D\Gamma_1)^{-1} \times \\ &\times \left[\left(I + D\Gamma_2 (C + D\Gamma_1)^{-1}\right)^{-1} - I\right] B + \\ &+ (L_\phi + iI)^{-1} \vec{\Phi}(x)\Gamma_2 (C + D\Gamma_1 + D\Gamma_2)^{-1} B + \\ &+ (L_\phi + iI)^{-1} \vec{\Phi}(x)\Gamma_1 (C + D\Gamma_1)^{-1} \times \\ &\times \left[\left(I + D\Gamma_2 (C + D\Gamma_1)^{-1}\right)^{-1} - I\right] B.\end{aligned}$$

Таким образом, разность резольвент представима в виде

$$\begin{aligned}&(L_\Gamma - \lambda I)^{-1} f(x) - (L_{\Gamma_1} - \lambda I)^{-1} f(x) = \\ &= (L_\Phi + iI)^{-1} Q\Gamma_2 (C + D\Gamma_1 + D\Gamma_2)^{-1} B + \\ &+ (L_\Phi - iI)^{-1} \vec{\Phi}(x)\Gamma_2 (C + D\Gamma_1 + D\Gamma_2)^{-1} B + \\ &+ (L_\Phi + iI)^{-1} (A + Q\Gamma_1)(C + D\Gamma_1)^{-1} \times \\ &\times \left[\left(I + D\Gamma_2 (C + D\Gamma_1)^{-1}\right)^{-1} - I\right] B + (L_\Phi + iI)^{-1} \times \\ &\times \vec{\Phi}(x)\Gamma_1 (C + D\Gamma_1)^{-1} \cdot \left[\left(I + D\Gamma_2 (C + D\Gamma_1)^{-1}\right)^{-1} - I\right] B.\end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 528 с.

2. *Кангужин Б.Е.* Вычислительные аспекты биортогональных разложений // Вычислительные технологии. 2004. № 9. С. 70-75.

3. *Кангужин Б.Е., Кошанова М.Д.* О теореме единственности и существования решения нелокальной по времени задач для уравнения типа С. Л. Соболева // Известия НАН РК. 2010. № 1.

Резюме

С. Л. Соболев типтес теңдеу үшін сызықты локальды емес есептер карастырылады. Сол типтегі дифференциалдық оператор үшін резольвентының формуласы есептеліп, резолвенттердің айырымдарының өрнегі көрсетілген.

Summary

The linear non local on time of the problems are studied for equation of the type S. L. Sobolev. Formulas rezolvent are received for given differential operator, as well as are received presentations on difference rezolvent.

УДК 517.9

МКТУ им. А. Яссауи *Поступила 30.03.10г.*