*Ю. В. КОЗАЧЕНКО[1], А. А. ПАШКО[2]*

([1]Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев, Украина,

[2]Европейский университет, Киев, Украина)

# ОЦЕНКА СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ МОДЕЛЕЙ СУБГАУССОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ В ПРОСТРАНСТВАХ ОРЛИЧА

**Аннотация.** Построены субгауссовские модели для гауссовских случайных процессов, представимых в виде стохастических интегралов. При реальном моделировании не удается получить гауссовские случайные величины, а получаются строго субгауссовские случайные величины. Полученные модели аппроксимируют случайные процессы с заданной точностью и надежностью в нормах пространств Орлича. Изучается ско-рость сходимости моделей гауссовских случайных процессов.

**Ключевые слова:** модель, скорость сходимости, субгауссовские величины, гауссовские процессы, точность моделирования.

**Тірек сөздер:** үлгі, шығу жылдамдығы, субгаусс шамалары, гаусс үдерістері, үлгілеудің дәлдігі.

**Keywords:** model, rate of convergence, subGaussian variables, Gaussian processes, simulation accuracy.

**Основные определения**. Пусть $(T,\rho)$ – некоторое метрическое пространство, $X=\{X(t), t\in T\}$ – случайный процесс, который можно представить в виде

$$X(t)=\sum_{r=1}^{N}\int_0^\infty f_r(t,u)\,d\xi_r(u),$$

где $\{\xi_r(u)\}$ субгауссовские случайные процессы [1-2].

Пусть $(T,\Sigma,\mu)$, $\mu(T)<\infty$ – некоторое измеримое пространство, $L_U(T)$ – пространство Орлича, порожденное С-функцией $U=\{U(x),\ x\in R\}$.

**Определение 1**. Пространством Орлича, порожденным функцией $U(x)$, называется семейство функций $\{f(t), t\in T\}$, таких, что для всех функций $f(x)$ существует константа $r$, такая что

$$\int_T U\left(\frac{f(t)}{r}\right) d\mu(t) \quad < \infty .$$

Пространство $L_U(T)$ есть банаховим относительно нормы Люксембурга

$$\| f \|_{L_U} = \inf\left\{ r > 0 : \int_T U\left(\frac{f(t)}{r}\right) d\mu(t) \le 1 \right\}.$$

В качестве $U(x)$ можно рассмотреть, например, функцию $U(x) = \exp\left\{|x|^{\alpha}\right\} - 1, \quad \alpha \ge 1$ [3-4].

**Определение 2**. Семья функций $f = \{f(t,u), t \in T, u > 0\}$ принадлежит классу $D_U(c)$, если все функции $f_u = \{f(t,u), t \in T\}$ принадлежат пространству Орлича $L_U(T)$ и существует монотонно неубывающая функция $c(u) > 0, \quad u \ge 0$ такая что для функций $f(u,\cdot)$ выполняется неравенство

$$\| f(u,\cdot) \|_{L_U} \le c(u) \| f(u,\cdot) \|_{L_2} .$$

Пусть $(\Omega, \mathrm{A}, P)$ – стандартное вероятностное пространство.

**Определение 3**. Случайная величина $\xi$ называется субгауссовой, если $E\xi = 0$ и существует такое $a \ge 0$ , что о для всех $\lambda \in R^1$ имеет место оценка

$$E\exp\{\lambda\xi\} \le \exp\left\{\frac{\lambda^2 a^2}{2}\right\}.$$

Пространство субгауссових величин $Sub(\Omega)$ является банаховим относительно нормы [5]

$$\tau(\xi) = \sup_{\lambda \ne 0}\left[\frac{2\ln E\exp\{\lambda\xi\}}{\lambda^2}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

**Оценки скорости сходимости.** Обозначим

$$X_{\Lambda}(t) = \sum_{r=1}^{N} \int_{\Lambda}^{\infty} f_r(t,u)\, d\xi_r(u),$$

$$X_a^b(t) = \sum_{r=1}^{N} \int_a^b f_r(t,u)\, d\xi_r(u),$$

$$R_a^b(t,\varphi) = \sum_{r=1}^{N} \int_a^b \varphi(u) f_r(t,u)\, d\xi_r(u),$$

где $\varphi = \{\varphi(u), u \ge 0\}$ – некоторая непрерывная слева монотонно неубывающая функция такая, что $\varphi(u) \to \infty$ при $u \to \infty$. Пусть $\xi_r = \{\xi_r(u), u \ge 0\}, r = 1,..., N$ регулярные совместно строго суб-гауссовские случайные процессы.

**Лемма 1**. Пусть $X = \{X(t), t \in T\}$ регулярный строго субгауссовский случайный процесс из класса $D_U(c)$. Тогда для любых $0 \le d \le a < b < \infty$ и $0 \le s < 1$ имеет место

$$E\exp\left\{\frac{s\left\|X_a^b(t)\right\|_{L_U}^2}{2\left(V_a^b(d)\right)^2}\right\} \quad \le \quad \frac{1}{\sqrt{1-s}},$$

где

$$V_a^b(d)=\frac{\left(E\left\|R_d^a(t,\varphi)\right\|_{L_2}^2\right)^{\frac{1}{2}}c(a)}{\varphi(a)} + \frac{\left(E\left\|R_d^b(t,\varphi)\right\|_{L_2}^2\right)^{\frac{1}{2}}c(b)}{\varphi(b)}+$$

$$+\int_a^b c(u)\left(E\left\|R_d^u(t,\varphi)\right\|_{L_2}^2\right)^{\frac{1}{2}} d\left(-\frac{1}{\varphi(u)}\right).$$

***Доказательство.*** Поскольку имеет место равенство

$$X_a^b(t)=\frac{R_d^b(t,\varphi)}{\varphi(b)} - \frac{R_d^a(t,\varphi)}{\varphi(a)}+\int_a^b R_d^u(t,\varphi)\, d\left(-\frac{1}{\varphi(u)}\right).$$

Тогда

$$\left\|X_a^b(t)\right\|_{L_U} =\frac{\left\|R_d^b(t,\varphi)\right\|_{L_U}}{\varphi(b)} + \frac{\left\|R_d^a(t,\varphi)\right\|_{L_U}}{\varphi(a)}+\int_a^b \left\|R_d^u(t,\varphi)\right\|_{L_U} d\left(-\frac{1}{\varphi(u)}\right)\le$$

$$\le\frac{c(b)\left\|R_d^b(t,\varphi)\right\|_{L_2}}{\varphi(b)} + \frac{c(a)\left\|R_d^a(t,\varphi)\right\|_{L_2}}{\varphi(a)}+\int_a^b c(u)\left\|R_d^u(t,\varphi)\right\|_{L_2} d\left(-\frac{1}{\varphi(u)}\right)$$

Пусть $W(a,b)>0$, $\delta(a)>0,$ $\delta(b)>0$, $\delta(a,b)>0$ – некоторые числа и $\delta(a)+\delta(b)+\delta(a,b)=1$. По неравенству Гельдера имеем соотношение

$$E\exp\left\{\frac{\left\|X_a^b(t)\right\|^2_{L_U}}{W^2(a,b)}\right\}\le E\exp\left\{\frac{1}{W^2(a,b)}\left(\frac{\delta(b)c(b)}{\delta(b)\varphi(b)}\left\|R_d^b(t,\varphi)\right\|_{L_2} + \frac{\delta(a)c(a)}{\delta(a)\varphi(a)}\left\|R_d^a(t,\varphi)\right\|_{L_2} +\right.\right.$$

$$\left.\left.+\ \frac{\delta(a,b)}{\delta(a,b)}\int_a^b c(u)\left\|R_d^u(t,\varphi)\right\|_{L_2} d\left(-\frac{1}{\varphi(u)}\right)\right)^2\right\}\le$$

$$\le\left(E\exp\left\{\left(\frac{c(b)\left\|R_d^b(t,\varphi)\right\|_{L_2}}{\delta(b)\varphi(b)W(a,b)}\right)^2\right\}\right)^{\delta(b)}\left(E\exp\left\{\left(\frac{c(a)\left\|R_d^a(t,\varphi)\right\|_{L_2}}{\delta(a)\varphi(a)W(a,b)}\right)^2\right\}\right)^{\delta(a)}\times$$

$$\left(E\exp\left\{\left(\int_a^b\frac{c(u)\left\|R_d^u(t,\varphi)\right\|_{L_2}}{\delta(a,b)W(a,b)}\, d\left(-\frac{1}{\varphi(u)}\right)\right)^2\right\}\right)^{\delta(a,b)}$$

Обозначим $k(u)=\dfrac{c(u)}{\delta(a,b)W(a,b)}$. Пусть $p(u)>0$ такая функция, что $\int\limits_a^b p(u)d\left(-\dfrac{1}{\varphi(u)}\right)=1$. Тогда из неравенства Коши следует, что

$$E\exp\left\{\left(\int\limits_a^b \frac{c(u)\left\|R_d^u(t,\varphi)\right\|_{L_2}}{\delta(a,b)W(a,b)}\,d\left(-\frac{1}{\varphi(u)}\right)\right)^2\right\}\le \quad \exp\left\{\int\limits_a^b \ln\left(E\exp\left\{\left(\frac{k(u)\left\|R_d^u(t,\varphi)\right\|_{L_2}}{p(u)}\right)^2\right\}\right)p(u)d\left(-\frac{1}{\varphi(u)}\right)\right\}.$$

Положим при $0<s<1$

$$\delta(a,b)=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{s}\;W(a,b)}\int\limits_a^b c(u)\left(E\left\|R_d^u(t,\varphi)\right\|_{L_2}^2\right)^{\frac{1}{2}}\,d\left(-\frac{1}{\varphi(u)}\right),$$

$$p(u)=\frac{\sqrt{2}c(u)\left(E\left\|R_d^u(t,\varphi)\right\|_{L_2}^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{s}\;\delta(a,b)W(a,b)}.$$

Ясно, что при таком выборе $\int\limits_a^b p(u)d\left(-\dfrac{1}{\varphi(u)}\right)=1$ и имеем

$$E\exp\left\{\left(\frac{k(u)\left\|R_d^u(t,\varphi)\right\|_{L_2}}{p(u)}\right)^2\right\}=E\exp\left\{\frac{s\left\|R_d^u(t,\varphi)\right\|^2{}_{L_2}}{2E\left\|R_d^u(t,\varphi)\right\|^2{}_{L_2}}\right\}\le\frac{1}{\sqrt{1-s}}.$$

Далее имеем

$$E\exp\left\{\left(\int\limits_a^b \frac{c(u)\left\|R_d^u(t,\varphi)\right\|_{L_2}}{\delta(a,b)W(a,b)}\,d\left(-\frac{1}{\varphi(u)}\right)\right)^2\right\}\quad\le\frac{1}{\sqrt{1-s}}.$$

Положим

$$\delta(a)=\quad\frac{\sqrt{2}c(a)\left(E\left\|R_d^a(t,\varphi)\right\|^2{}_{L_2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{s}\;\varphi(a)W(a,b)},$$

$$\delta(b)=\quad\frac{\sqrt{2}c(b)\left(E\left\|R_d^b(t,\varphi)\right\|^2{}_{L_2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{s}\;\varphi(b)W(a,b)},\ W(a,b)=\sqrt{\frac{2}{s}}\,V_a^b(d).$$

Тогда имеет место

$$E\exp\left\{\left(\frac{c(b)\left\|R_d^b(t,\varphi)\right\|_{L_2}}{\delta(b)\varphi(b)W(a,b)}\right)^2\right\}=E\exp\left\{\frac{s\left\|R_d^b(t,\varphi)\right\|^2_{L_2}}{2E\left\|R_d^b(t,\varphi)\right\|^2_{L_2}}\right\}\le\frac{1}{\sqrt{1-s}}.$$

Аналогично

$$E\exp\left\{\left(\frac{c(a)\left\|R_d^a(t,\varphi)\right\|_{L_2}}{\delta(a)\varphi(a)W(a,b)}\right)^2\right\}\le\frac{1}{\sqrt{1-s}}.$$

Лемма доказана.

**Лемма 2.** Пусть выполняются условия леммы 1. Тогда для любых $\varepsilon>0$ и $0\le s<1$ имеет место неравенство

$$P\left\{\left\|X_a^b(t)\right\|_{L_U}>\varepsilon\right\}\le\frac{1}{\sqrt{1-s}}\exp\left\{-\frac{s\varepsilon^2}{2\left(V_a^b(d)\right)^2}\right\},$$

где $V_a^b(d)$ задано в лемме 1.

***Доказательство.*** Утверждение следует из леммы1 и неравенства Чебышева

$$P\left\{\left\|X_a^b(t)\right\|_{L_U}>\varepsilon\right\}\le E\exp\left\{\frac{s\left\|X_a^b(t)\right\|^2_{L_U}}{2\left(V_a^b(d)\right)^2}\right\}\exp\left\{-\frac{s\varepsilon^2}{2\left(V_a^b(d)\right)^2}\right\}.$$

Лемма доказана.

**Теорема 1**. Пусть $X=\{X(t),t\in T\}$ регулярный строго субгауссовский случайный процесс из класса $D_U(c)$. Если для некоторой монотонно неубывающей функции $\varphi=\{\varphi(u),u\ge 0\}$ такой, что $\varphi(u)>0$ при $u\ge 0$ и $\varphi(u)\to\infty$ при $u\to\infty$ существует такое $d\ge 0$, что выполняются условия

$$\int_d^\infty c(u)\left(E\left\|R_d^u(t,\varphi)\right\|^2_{L_2}\right)^{\frac{1}{2}}d\left(-\frac{1}{\varphi(u)}\right)<\infty,$$

$$\frac{\left(E\left\|R_d^b(t,\varphi)\right\|^2_{L_2}\right)^{\frac{1}{2}}c(b)}{\varphi(b)}\to 0 \text{ при } b\to\infty,$$

тогда случайный процесс $X=\{X(t),t\in T\}$ с вероятностью 1 принадлежит пространству $L_U(T)$ и для любых $\varepsilon>0$, $0\le s<1$, $a\ge d$ имеет место неравенство

$$P\left\{\left\|X_a(t)\right\|_{L_U}>\varepsilon\right\}\le\frac{1}{\sqrt{1-s}}\exp\left\{-\frac{s\varepsilon^2}{2\left(V_a(d)\right)^2}\right\},$$

где

$$V_a(d)=\frac{\left(E\left\|R_d^a(t,\varphi)\right\|_{L_2}^2\right)^{\frac{1}{2}}c(a)}{\varphi(a)}\quad+\quad\int_a^\infty c(u)\left(E\left\|R_d^u(t,\varphi)\right\|_{L_2}^2\right)^{\frac{1}{2}}d\left(-\frac{1}{\varphi(u)}\right).$$

***Доказательство.*** Если выполняются условия теоремы, то при $a\to\infty$ и $b\to\infty$ $V_a^b(d)\to 0$. И из леммы 2 следует, что $\|X_a(t)\|_{L_u}\to 0$ по вероятности. Тогда существуют последовательности $a_n<b_n$, что $\|X_{a_n}^{b_n}(t)\|_{L_u}\to 0$ при $a_n\to\infty$ с вероятностью 1, то есть $X$ с вероятностью единица принадлежит пространству $L_U(T)$. Оценка следует из леммы 2 и леммы Фату.

Теорема доказана.

**Следствие 1.** Пусть выполняются условия теоремы 1. Тогда для всех $\varepsilon>V_a(d)$ и $a\ge d$ имеет место неравенство

$$P\left\{\|X_a^b(t)\|_{L_U}>\varepsilon\right\}\le\quad\exp\left\{\frac{1}{2}\right\}\frac{\varepsilon}{V_a(d)}\exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{2(V_a(d))^2}\right\}.$$

Оценка следует из теоремы 1, если правую часть минимизировать по $s$.

Если положить $a = d$, то

$$V_a(a)=\quad\int_a^\infty c(u)\left(E\left\|R_a^u(t,\varphi)\right\|_{L_2}^2\right)^{\frac{1}{2}}d\left(-\frac{1}{\varphi(u)}\right).$$

**Моделирование случайных процессов**. Полученные оценки используются для построения моделей, приближающих случайные процессы с заданной точностью и надежностью в норме пространств Орлича. Аналогичные оценки для гауссовских процессов, представимых в виде рядов, получены в [3, 4].

**Определение 4**. Пусть $\Lambda>0$, $D_\Lambda$ – некоторое разбиение интервала $[0,\Lambda]$, $D_\Lambda:\quad 0=u_0<u_1<\quad\ldots\quad<u_{n-1}<u_n=\Lambda$. Случайный процесс $X_{n,\Lambda}=\{X_n(t,\Lambda),\quad t\in T\}$, где

$$X_n(t,\Lambda)=\sum_{r=1}^{N}\ \sum_{i=1}^{n-1}\ f_r(t,u_i)\left(\xi_r(u_{i+1})-\xi_r(u_i)\right)$$

называется аппроксимационной моделью (А-моделью) процесса $X$.

То есть, А – модель процесса $X$ можно получить следующим образом: необходимо смоделиро-вать сумму $X_n(t,\Lambda)=\sum_{r=1}^{N}\ \sum_{i=1}^{n-1}\ f_r(t,u_i)\zeta_{r,i}$, где $\{\zeta_{r,i}, r=1,2,\ldots,N,\quad i=0,1,\ldots,n-1\}$ семья строго субгауссовых случайных величин с известной ковариационной матрицей $C=\left\|E\zeta_{r,i}\zeta_{p,j}\right\|$.

Пусть заданы два числа $\delta > 0$ и $\alpha$, $0 < \alpha < 1$.

**Определение 5**. Будем говорить, что модель $X_n(t,\Lambda)$ приближает процесс $X(t)$ с надеж-ностью $1-\alpha$ и точностью $\delta$ в норме пространства $D_U(c)$, если выполняется неравенство $P\{\|X(t)-X_n(t,\Lambda)\| > \delta\} \le \alpha$.

Полученные в работе оценки $P\{\|X(t)-X_n(t,\Lambda)\| > \delta\} \le W_n(\delta, D_\Lambda)$, где $W_n(\delta, D_\Lambda), \delta > 0$ – монотонно неубывающая по $n$ и $\delta$ функция, используются для нахождения параметров модели. Число $n$ и разбиение $D_\Lambda$ определяется как минимальные, для которых выполняется $W_n(\delta, D_\Lambda) \le \alpha$.

Рассмотренные модели использовались при испытаниях технических систем.

## ЛИТЕРАТУРА

1 Пашко А.А. Об оценке распределения супремума субгауссовских интегралов // Теория вероятностей и мат. статистика. – 1992. – Вып. 46. – С. 124-132.

2 Пашко А.А. Равномерная сходимость субгауссовских интегралов // Теория вероятностей и ее применение. – 1998. – Т. 43, № 4. – С. 793-798.

3 Козаченко Ю.В., Пашко А.А. Точность моделирования случайных процессов в нормах пространств Орлича. I // Теория вероятностей и мат. статистика. – 1998. – Вып. 58. – С. 75-90.

4 Козаченко Ю.В., Пашко А.А. Точность моделирования случайных процессов в нормах пространств Орлича. II // Теория вероятностей и мат. статистика. – 1998. – Вып. 59. – С. 45-60.

5 Булдыгин В.В., Козаченко Ю.В. Метрические характеристики случайных величин и процессов. – Киев: ТВиМС, 1998.

## REFERENCES

1 Pashko A.A. An estimate of the distribution of the supremum of sub Gaussian integrals. Theor. Probability and Math. Statist. 1992. 46. P. 124-132 (in Russ).

2 Pashko A.A. Uniform convergence subGaussian integrals. Theor. Probability and Applications. 1998. T. 43, N 4. P. 793-798 (in Russ).

3 Kozachenko Yu.V., Pashko A.A. Accuracy of simulation of stochastic processes in norms of Orlicz spaces. I. Theor. Probability and Math. Statist. 1998. 58. P. 45-60 (in Ukr).

4 Kozachenko Yu.V., Pashko A.A. Accuracy of simulation of stochastic processes in norms of Orlicz spaces. II. Theor. Probability and Math. Statist. 1998. 59. P. 75-90 (in Ukr).

5 Buldygin V.V., Kozachenko Yu.V. Metric characterization of random variables and random processes. Kiev: ТВиМС, 1998; English transl., Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.

## Резюме

*Ю. В. Козаченко[1], А. А. Пашко[2]*

([1]Тарас Шевченко атындағы Киев ұлттық университеті, Киев, Украина,

[2]Европа университеті, Киев, Украина)

ОРЛИЧ КЕҢІСТІГІНДЕГІ СУБГАУСС КЕЗДЕЙСОҚ ҮДЕРІС ҮЛГІЛЕРІНІҢ

ШЫҒУ ЖЫЛДАМДЫҒЫН БАҒАЛАУ

Стохастикалық интеграл түрінде суреттелетін гаусс кездейсоқ үдерістері үшін субгаусс үлгісі құрылған. Нақты үлгілеу кезінде гаустық кездейсоқ шаманы алу мүмкін емес, тек дәлме-дәл субгаустық кездейсоқ шама алынады. Алынған үлгілер кездейсоқ үдерістерді берілген дәлділік пен дәйектілік мөлшерде Орлич кеңістігінде аппроксимирлейді. Гаусс кездейсоқ үдерістер үлгілерінің шығу жылдамдығы зерттеледі.

**Тірек сөздер:** үлгі, шығу жылдамдығы, субгаусс шамалары, гаусс үдерістері, үлгілеудің дәлдігі.

## Summary

*Yu. V. Kozachenko[1], A. A. Pashko[2]*

([1]T. Shevchenko university, Kyiv, Ukraine,

[2]European university, Kyiv, Ukraine)

ESTIMATES FOR THE RATE OF CONVERGENCE OF MODELS SUBGAUSSIAN RANDOM PROCESSES IN ORLICZ SPACES

In this work subgaussian model for Gaussian random processes can be represented as stochastic integrals. In a real simulation can not get a Gaussian random variables, and obtained a strictly subgaussian random variables. The resulting model is approximated by random processes with given accuracy and reliability in the norms of Orlicz spaces. We study the rate of convergence of Gaussian models of stochastic processes.

**Keywords:** model, rate of convergence, subGaussian variables, Gaussian processes, simulation accuracy.

*Поступила 15.10.2013г.*