УДК 511

С. Ш. КОЖЕГЕЛЬДИНОВ

ОБ ОДНОМ ДИОФАНТОВОМ УРАВНЕНИИ ВЫСШЕЙ СТЕПЕНИ

(Представлена академиком НАН РК М. О. Отелбаевым)

Исследуется множество натуральных решений одного диофантова уравнения, коэффициенты и степени которого удовлетворяют некоторым условиям. Для этого уравнения удалось найти общую формулу, описывающую все такие решения.

Известно, что среди значительного количества диофантовых уравнений существуют такие, для каждого из которых невозможно без арифметических функций, введенных автором, найти общую формулу, описывающую все (без исключения) натуральные решения. В дальнейшем речь пойдет только о таких уравнениях.

Если при отыскании всех натуральных решений одних диофантовых уравнений, как героново, сервасова, виетово, диксоново весьма важную роль играют простейшие арифметические функции [1-3], то при отыскании таких решений у других диофантовых уравнений, как эйлерово, ал-хусайново, гениварово, аналкарово, вланичубово, нагеллово, такую роль играют арифметические функции более сложной природы [4-8]. Существуют и такие диофантовы уравнения, как пифагорово, вавилоново, гельфондово, сермихово, вацландрово, у каждого из которых все натуральные решения можно найти как с помощью простейших арифметических функций, так и с помощью арифметических функций более сложной природы [1-8].

В [9] доказана теорема: Уравнение $a_1x_1^{n_1}+a_2x_2^{n_2}+\ldots+a_kx_k^{n_k}=0$, где k – натуральное число ≥ 2, а $a_1,a_2,\ldots,a_k$ – целые числа, $a_1\neq 0$, $a_2+a_3+\ldots+a_k\neq 0$, $n_1,n_2,\ldots,n_k$ – такие натуральные числа, что n_1 и $n_2n_3\ldots n_k$ взаимно простые, имеет бесконечное множество решений в целых числах $x_1,x_2,\ldots,x_k$, а в случае, когда $a_1>0$, $a_2+a_3+\ldots+a_k<0$, имеет бесконечное множество решений в натуральных числах $x_1,x_2,\ldots,x_k$.

Как явствует из сказанного выше, в ней речь идет лишь о бесконечном множестве решений рассматриваемого уравнения как в целых, так и в натуральных числах, но не более. Поэтому ниже рассматривается следующее диофантово уравнение

$$\alpha_0x_0^{\beta_0}+\alpha_1x_1^{\beta_1}+\ldots+\alpha_{i-1}x_{i-1}^{\beta_{i-1}}=\alpha_ix_i^{\beta_i}+\ldots+\alpha_nx_n^{\beta_n}, \tag{1}$$

где

$x_0,x_1,\ldots,x_n\in N$, $n,\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_n$ – данные натуральные числа и

$$(\beta_0,\beta)=1,\quad \beta=[\beta_1,\ldots,\beta_n], \tag{2}$$

которое, впредь до более удачного названия, будет именоваться чваковым уравнением.

Иначе говоря, диофантово уравнение (1) с условием (2) называется чваковым, если среди чисел $\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_n$ имеется хотя бы одно число, которое взаимно просто с наименьшим общим кратным всех остальных n чисел из $\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_n$. Здесь и в дальнейшем β_0 есть число взаимно простое с числом $\beta=[\beta_1,\ldots,\beta_n]$. Поэтому $[\beta_0,\beta]=\beta_0\beta$, где $\beta=[\beta_1,\ldots,\beta_n]$.

Каково бы ни было натуральное число n, можно считать, что одночлены $\alpha_0x_0^{\beta_0}$ и $\alpha_nx_n^{\beta_n}$, где $\alpha_0,\alpha_1\in N$, в чваковом уравнении находятся в разных частях: первый в левой, а второй в правой. Например, если $n=1$, то чваково уравнение имеет вид: $\alpha_0x_0^{\beta_0}=\alpha_1x_1^{\beta_1}$, где $x_0,x_1\in N$, $\alpha_0,\alpha_1,\beta_0,\beta_1$ -

данные натуральные числа и $(\beta_0,\beta_1)=1$, где $\beta=[\beta_1]=\beta_1$; если же $n=3$, то оно имеет вид: либо $\alpha_0x_0^{\beta_0}+\alpha_1x_1^{\beta_1}+\alpha_2x_2^{\beta_2}=\alpha_3x_3^{\beta_3}$, либо $\alpha_0x_0^{\beta_0}+\alpha_1x_1^{\beta_1}=\alpha_2x_2^{\beta_2}+\alpha_3x_3^{\beta_3}$, либо $\alpha_0x_0^{\beta_0}=\alpha_1x_1^{\beta_1}+\alpha_2x_2^{\beta_2}+\alpha_3x_3^{\beta_3}$, где $x_0,x_1,x_2,x_3\in N$, $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_3$ - данные натуральные числа и $(\beta_0,\beta)=1$, где $\beta=[\beta_1,\beta_2,\beta_3]$.

Решение $\langle x_0,x_1,...,x_n\rangle$ чвакова уравнения (1) с условием (2) называется основным решением, если $\left(x_0^{\beta_0},x_1^{\beta_1},...,x_n^{\beta_n}\right)_{\deg\beta_0\beta}=1$, т.е. если $x_0^{\beta_0},x_1^{\beta_1},...,x_n^{\beta_n}$ взаимно простые числа степени $\beta_0\beta$, где $\beta=[\beta_1,...,\beta_n]$.

Постановка задачи. Пусть $\left\{<x_0,x_1,...,x_n>\middle|(2)\wedge(1)\right\}$ – множество всех решений чвакова уравнения (1) с условием (2) Требуется найти общую формулу, описывающую все эти решения. При этом ставится задача, чтобы число целых параметров, входящих в такую общую формулу, не превышало $n+1$.

Для решения поставленной задачи используются идеи, методы и результаты работ [1-15].

ТЕОРЕМА. Все решения чвакова уравнения (1) с условием (2) получаются из формулы

$$x_0=k^{\beta}\frac{\alpha_0^{\beta-u}\left(-\alpha_1a_1^{\beta_1}-...-\alpha_{i-1}a_{i-1}^{\beta_{i-1}}+\alpha_ia_i^{\beta_i}+...+\alpha_na_n^{\beta_n}\right)^u}{\Delta^{\beta}},\tag{3}$$

$$x_j=k^{\beta_0\beta/\beta_j}\frac{\alpha_0^{\beta(\beta_0-\vartheta)/\beta_j}a_j\left(-\alpha_1a_1^{\beta_1}-...-\alpha_{i-1}a_{i-1}^{\beta_{i-1}}+\alpha_ia_i^{\beta_i}+...+\alpha_na_n^{\beta_n}\right)^{\beta\vartheta/\beta_j}}{\Delta^{\beta_0\beta/\beta_j}},\ j=\overrightarrow{1,n};$$

где

$$k,a_1,...,a_n\in N,\quad \alpha_1a_1^{\beta_1}+...+\alpha_{i-1}a_{i-1}^{\beta_{i-1}}<\alpha_ia_i^{\beta_i}+...+\alpha_na_n^{\beta_n},\quad \beta_0u-\beta\vartheta=1,\quad \left(a_1^{\beta_1},a_2^{\beta_2},...,a_n^{\beta_n}\right)_{\deg\beta}=1,$$

$$\Delta=\left(\alpha_0^{\beta_0(\beta-u)}\left(-\alpha_1a_1^{\beta_1}-...-\alpha_{i-1}a_{i-1}^{\beta_{i-1}}+\alpha_ia_i^{\beta_i}+...+\alpha_na_n^{\beta_n}\right)^{\beta\vartheta}\times\right.$$
$$\left.\times\left(\alpha_0\left(a_1^{\beta_1},...,a_n^{\beta_n}\right),-\alpha_1a_1^{\beta_1}-...-\alpha_{i-1}a_{i-1}^{\beta_{i-1}}+\alpha_ia_i^{\beta_i}+...+\alpha_na_n^{\beta_n}\right)\right)_{\deg\beta_0\beta}.\tag{4}$$

Каждое такое решение определяется этим способом однозначно.

Не только здесь, но и в дальнейшем для удобства совокупность формул вида (3) называется формулой.

Так как следующие диофантовы уравнения: $x^3+y^3+z^3=t^2$, $x^3+y^3+z^3=w^4$, $x^2+y^2=z^3$, $x^2-y^2=z^3$, $x^2+2y^2=z^3$, $z^2+x^3=y^4$, $x^2+y^3+z^4=t^2$, $x^3+y^3=z^2$, $x^2+y^4=2z^3$ [9,с.61-63,66,70];

$x^6+179y^4=z^5$, $x^2+y^2=z^5$, $x^2+y^3=z^5$, $x^{3n+1}=y^3+z^3$, $x^{3n-1}=y^3+z^3$, где n – данное натуральное число, [12,с.234] являются чваковыми, то все натуральные решения каждой из них получается из формулы (3) с условием (4).

Из теоремы очевидным образом вытекает

СЛЕДСТВИЕ. Все основные решения чвакова уравнения (1) с условием (2) получаются из формулы

$$x_0 = \frac{\alpha_0^{\beta-u}\left(\alpha_i a_i^{\beta_i} + \ldots + \alpha_n a_n^{\beta_n} - \alpha_1 a_1^{\beta_1} - \ldots - \alpha_{i-1} a_{i-1}^{\beta_{i-1}}\right)^u}{\Delta^{\beta}},$$

$$x_j = \frac{\alpha_0^{\beta(\beta_0-\vartheta)/\beta_j} a_j \left(\alpha_i a_i^{\beta_i} + \ldots + \alpha_n a_n^{\beta_n} - \alpha_1 a_1^{\beta_1} - \ldots - \alpha_{i-1} a_{i-1}^{\beta_{i-1}}\right)^{\beta\vartheta/\beta_j}}{\Delta^{\beta_0\beta/\beta_j}}, j = 1, 2, \ldots, n, \qquad (*1)$$

где

$$a_1, \ldots, a_n \in N, \quad \alpha_1 a_1^{\beta_1} + \ldots + \alpha_{i-1} a_{i-1}^{\beta_{i-1}} < \alpha_i a_i^{\beta_i} + \ldots + \alpha_n a_n^{\beta_n}, \quad \beta_0 u - \beta\vartheta = 1, \quad \left(a_1^{\beta_1}, a_2^{\beta_2}, \ldots, a_n^{\beta_n}\right)_{\deg\beta} = 1,$$

$$\Delta = \left(\alpha_0^{\beta_0(\beta-u)}\left(\alpha_i a_i^{\beta_i} + \ldots + \alpha_n a_n^{\beta_n} - \alpha_1 a_1^{\beta_1} - \ldots - \alpha_{i-1} a_{i-1}^{\beta_{i-1}}\right)^{\beta\vartheta} \times\right.$$

$$\left.\times\left(\alpha_0\left(a_1^{\beta_1}, \ldots, a_n^{\beta_n}\right), \alpha_i a_i^{\beta_i} + \ldots + \alpha_n a_n^{\beta_n} - \alpha_1 a_1^{\beta_1} - \ldots - \alpha_{i-1} a_{i-1}^{\beta_{i-1}}\right)\right)_{\deg\beta_0\beta}. \qquad (*2)$$

Каждое такое основное решение определяется этим способом однозначно.

Ясно, что формула ($*_1$) с условием ($*_2$) получается из формулы (3) с условием (4) при $k = 1$.

Доказательство теоремы. Предположим, что условия теоремы выполнены. Так как $(\beta_0, \beta) = 1$, где $\beta = [\beta_1, \ldots, \beta_n]$, то существуют натуральные числа u, ϑ такие, что $\beta_0 u - \beta\vartheta = 1$. Из бесконечного множества натуральных решений этого уравнения нас интересует одно и только одно, а именно наименьшее решение обозначаемое через $\langle u, \vartheta \rangle$[1,3,4].

В (1) с условием (2) положим, что

$$x_0 = k^{\beta}\frac{\alpha_0^{\beta-u} t^u}{\Delta^{\beta}}, \quad x_j = k^{\beta_0\beta/\beta_j}\frac{\alpha_0^{\beta(\beta_0-\vartheta)/\beta_j} a_j t^{\beta\vartheta/\beta_j}}{\Delta^{\beta_0\beta/\beta_j}}, j = 1, 2, \ldots, n, \qquad (*3)$$

где

$$k, a_1, \ldots, a_n \in N, \quad \alpha_1 a_1^{\beta_1} + \ldots + \alpha_{i-1} a_{i-1}^{\beta_{i-1}} < \alpha_i a_i^{\beta_i} + \ldots + \alpha_n a_n^{\beta_n}, \quad \left(a_1^{\beta_1}, \ldots, a_n^{\beta_n}\right)_{\deg\beta} = 1, \quad \beta = [\beta_1, \ldots, \beta_n],$$

$$\Delta = \left(\alpha_0^{\beta_0(\beta-u)}\left(\alpha_i a_i^{\beta_i} + \ldots + \alpha_n a_n^{\beta_n} - \alpha_1 a_1^{\beta_1} - \ldots - \alpha_{i-1} a_{i-1}^{\beta_{i-1}}\right)^{\beta\vartheta} \times\right.$$

$$\left.\times\left(\alpha_0\left(a_1^{\beta_1}, \ldots, a_n^{\beta_n}\right), \alpha_i a_i^{\beta_i} + \ldots + \alpha_n a_n^{\beta_n} - \alpha_1 a_1^{\beta_1} - \ldots - \alpha_{i-1} a_{i-1}^{\beta_{i-1}}\right)\right)_{\deg\beta_0\beta}. \qquad (*4)$$

Из (1) с условием (2) в силу ($*_3$) с условием ($*_4$) имеем, что

$$\alpha_0\left(k^{\beta}\frac{\alpha_0^{\beta-u} t^u}{\Delta^{\beta}}\right)^{\beta_0} + \alpha_1\left(k^{\beta_0\beta/\beta_1}\frac{\alpha_0^{\beta(\beta_0-\vartheta)/\beta_1} a_1 t^{\beta\vartheta/\beta_1}}{\Delta^{\beta_0\beta/\beta_1}}\right)^{\beta_1} + \ldots + \alpha_{i-1}\left(k^{\beta_0\beta/\beta_{i-1}}\frac{\alpha_0^{\beta(\beta_0-\vartheta)/\beta_{i-1}} a_{i-1} t^{\beta\vartheta/\beta_{i-1}}}{\Delta^{\beta_0\beta/\beta_{i-1}}}\right)^{\beta_{i-1}} =$$

$$= \alpha_i\left(k^{\beta_0\beta/\beta_i}\frac{\alpha_0^{\beta(\beta_0-\vartheta)/\beta_i} a_i t^{\beta\vartheta/\beta_i}}{\Delta^{\beta_0\beta/\beta_i}}\right)^{\beta_i} + \ldots + \alpha_n\left(k^{\beta_0\beta/\beta_n}\frac{\alpha_0^{\beta(\beta_0-\vartheta)/\beta_n} a_n t^{\beta\vartheta/\beta_n}}{\Delta^{\beta_0\beta/\beta_n}}\right)^{\beta_n}$$

или

$$\alpha_0 k^{\beta_0\beta}\frac{\alpha_0^{\beta_0(\beta-u)}t^{\beta_0 u}}{\Delta^{\beta_0\beta}}+\alpha_1 k^{\beta_0\beta}\frac{\alpha_0^{\beta(\beta_0-\vartheta)}a_1^{\beta_1}t^{\beta\vartheta}}{\Delta^{\beta_0\beta}}+\ldots+\alpha_{i-1}k^{\beta_0\beta}\frac{\alpha_0^{\beta(\beta_0-\vartheta)}a_{i-1}^{\beta_{i-1}}t^{\beta\vartheta}}{\Delta^{\beta_0\beta}}=$$

$$=\alpha_i k^{\beta_0\beta}\frac{\alpha_0^{\beta(\beta_0-\vartheta)}a_i^{\beta_i}t^{\beta\vartheta}}{\Delta^{\beta_0\beta}}+\ldots+\alpha_n k^{\beta_0\beta}\frac{\alpha_0^{\beta(\beta_0-\vartheta)}a_n^{\beta_n}t^{\beta\vartheta}}{\Delta^{\beta_0\beta}},$$

откуда

$$t=\alpha_i a_i^{\beta_i}+\ldots+\alpha_n a_n^{\beta_n}-\alpha_1 a_1^{\beta_1}-\ldots-\alpha_{i-1}a_{i-1}^{\beta_{i-1}}, \qquad (*5)$$

где

$$a_1,\ldots,a_n\in N,\quad n,\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta_1,\ldots,\beta_n - \text{данные натуральные числа},\ \left(a_1^{\beta_1},\ldots,a_n^{\beta_n}\right)_{\deg\beta}=1. \qquad (*6)$$

Из ($*_3$) с условием ($*_4$) в силу ($*_5$) с условием ($*_6$) получаем формулу (3) с условием (4), которая является общей формулой всех решений чвакова уравнения (1) с условием (2). Без особого труда можно убедиться в том, что значения $x_0,x_1,\ldots,x_n$ из формулы (3) с условием (4) действительно удовлетворяют чвакову уравнению (1) с условием (2). При этом нетрудно заметить, что $\left(x_0^{\beta_0},x_1^{\beta_1},\ldots,x_n^{\beta_n}\right)_{\deg\beta_0\beta}=k$, где $k\in N$. И так как $\left(a_1^{\beta_1},\ldots,a_n^{\beta_n}\right)_{\deg\beta}=1$, где $\beta=\left[\beta_1,\ldots,\beta_n\right]$, то каждое решение чвакова уравнения (1) с условием (2) определяется этим способом однозначно.

Таким образом, теорема доказана.

Заметим, что число целых произвольных параметров, входящих в общую формулу (3) с условием (4), не превышает $n+1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кожегельдинов С.Ш.* Некоторые элементы теории диофантовых уравнений в упражнениях и задачах. М., 1993. 48 с.

2. *Кожегельдинов С.Ш.* Об использовании арифметических функций // II Международная конференция «Алгебраические, вероятностные, геометрическое, комбинаторные и функциональные методы в теории чисел». Тезисы докладов. Воронеж: ВГУ, 1995. С. 85.

3. *Кожегельдинов С.Ш.* Элементы теории диофантовых уравнений в упражнениях и задачах. Семипалатинск, 2003. 78 с.

4. *Кожегельдинов С.Ш.* Двухтысячелетний барьер взят. Избранные статьи и доклады. Научное издание. Алматы, 2001. 345 с.

5. *Кожегельдинов С.Ш.* Некоторые классические диофантовы уравнения от трех и более переменных. Новосибирск, 2002. Т. 1. 72 с.; Алматы, 2004. Т. 2. 176 с.; Алматы, 2006. Т. 3. 244 с.

6. *Кожегельдинов С.Ш.* Арифметические функции и натуральные решения некоторых систем классических диофантовых уравнений с общей переменной // III Международная конференция «Современные проблемы теории чисел и ее приложения» Тезисы докладов. Тула: ТГПУ, 1996. С. 76.

7. *Кожегельдинов С.Ш.* Об одном диофантовом уравнении // III Международная конференция «Современные проблемы теории чисел и ее приложения» Тезисы докладов. Тула: ТГПУ, 1996. С. 77.

8. *Кожегельдинов С.Ш.* К решению уравнений высших степеней в натуральных числах // Международная конференция «Современное состояние и перспективы развития математики в рамках программы «Казахстан в третьем тысячелетии». Тезисы докладов. Алматы: Ин. матем., 2000. С. 158-159.

9. *Серпинский В.* О решении уравнений в целых числах. М., 1961. 88 с.

10. *Диофант.* Арифметика и книга о многоугольных числах. М., 1974. 328 с.

11. *Ферма П.* Исследования по теории чисел и диофантову анализу. М., 1992. 320 с.

12. *Nagell T.* Sur quelques categories d'equations diophan-tiennes resolubles par des identites / Acta Arithmetica. IX. 3 (1964). S. 227-235.

13. *Dieulefait L.* Modular congruences, Q – curves, and the Diophantine equation $x^4+y^4=z^p$, Bull. Belgian Math. Soc., to appear.

14. *Luis V.* Dieulefait, Solving diophantiene equations $x^4+y^4=qz^p$ / Acta Arithmetica, 117.3 (2005). S. 207-211

15. *Wilfried Jvorra.* Sur lec courles hyperelliptiquess cyclotomiques et les equations $x^p-y^p=cz^2$ / Dissertationes Mathematicae Jssue 444, Jnstute of Mathematics, Polich Academy of Sciences. Warszawa, 2007. 46 pp. issn 0012 – 3862.

Семипалатинский государственный педагогический институт

Поступила 20.08.08г.