УДК: 658.012.011.56:658.512

А. А. КУАНДЫКОВ

АКСИОМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ФОРМАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ СЛОЖНЫМИ ОБЪЕКТАМИ

Приведены аксиомы, теоремы и правила выводов прикладной формальной системы, которая формализует процессы управления сложными объектами, в том числе компьютерными системами.

Введение. В [1–4] был предложен аксиоматический подход к построению теории управления сложными объектами, в том числе компьютерными системами. Система формализации процессов управления сложным объектом, построенная на основе аксиоматического подхода является проблемно-ориентированной и отличается от формальной системы классической математической логики семантической направленностью. Поэтому данная система названа прикладной формальной системой (ПФС).

В работе приводится часть аксиом и правил доказательства теорем, входящих в ПФС процессов управления объектом.

Аксиомы формальной системы процессов управления объектом.

Представим некоторые аксиомы одной из групп аксиом – *аксиомы ситуации объекта управления.*

Определение 1. Объектом управления является структура, состоящая из совокупности узлов (Y) и отношений (R′) между ними O = (Y, R′).

Определение 2. На объекте происходит технологическая операция ТП = (Тпi, R″), где Тпi - единичная технологическая операция, которая выполняется в узле Yi; R″ - отношения между технологическими операциями {Тпi}.

Аксиома 3. Состояние узла Yi характеризуется значением параметров (или координат) Xi = (xij, j=1,n).

Аксиома 4. Воздействие D_k на Y_i изменяет его состояния, которые проявляются в изменении значений {xij, j=1,n}.

Аксиома 5. Воздействие D_k на неавтономный узел Y_i не является локальным и приведет к изменению состояния $\{Y_j : j=1,q, j\neq i, q\neq 1\}$.

Аксиома 6. Воздействие D_k на автономный узел Y_i является локальным и не приведет к изменению состояния других $\{Y_j\}$.

Постулат 1. Обобщение значений контролируемых параметров состояния объекта. *Постулат об обобщении значений параметров состояния ОУ.*

Для объекта с непрерывным параметром.

Пусть для непрерывного параметра Pi выполняется условие:

$$(\Delta P_{i1}, P_{i1}') \to (U_1 = d_k) \text{ и } (\Delta P_{i2}, P_{i2}') \to (U_2 = d_k),$$

где ΔP_{i1} и ΔP_{i2} – интервалы значения параметра Pi; $P_{i1}' = dP_i(t)/dt$, $P_i(t) \in \Delta P_{i1}$ и $P_{i2}' = dP_{i2}(t)/dt\ P_i(t) \in \Delta P_{i2}$ - тенденция динамики (т.е. знак направления изменения значений - первая производная) изменения значения Pi в заданных интервалах; U_1, U_2 - принимаемые решения в соответствующих интервалах значения P_i, d_k – присваиваемое содержание (или значение) принимаемое решениями U_1, U_2 по управлению, которые нормализуют значения Pi в заданных интервалах. Пусть $P_{i3}' = dP_i(t)/dt$, $P_i(t) \in (P_{i1}, P_{i2})$ значения P_i с внутренней стороны двух интервалов ΔP_{i1} и ΔP_{i2}.

Тогда, при $\sigma_{i1}' \equiv \sigma_{i2}' \equiv \sigma_{i3}' \equiv \sigma_i^\circ$ и $U_1 \equiv U_2$ можно обобщить (значения интервалов параметра) значений параметра Pi: $P_{i1} \oplus P_{i2}$ и оно будет равняться $\Delta P_{i1} + \Delta P_{i2} + \Delta(P_{i2} - P_{i1})$, т.е.

$$Pi^{об} = P_{i1} \oplus P_{i2} = \Delta P_{i1} \cup \Delta P_{i2} \cup \Delta(P_{i2} - P_{i1}),$$

где по обозначению $\sigma_{i1}' = \{1, \text{если } P_{i1}' > 0;\ 0, \text{если } P_{i1}' \leq 0\}$, $\sigma_{i2}' = \{1, \text{если } P_{i2}' > 0;\ 0, \text{если } P_{i2}' \leq 0\}$, $\sigma_{i3}' = \{1, \text{если } P_{i3}' > 0;\ 0, \text{если } P_{i3}' \leq 0\}$; $P_{i1} = \Delta P_{i1}$, $P_{i2} = \Delta P_{i2}$; $\oplus$ - знак операции обобщения.

Отсюда, выражение: $(Pi^{об}, \sigma_i^\circ)$ является обобщением $[(\Delta P_{i1}, \sigma_i^\circ)\ (\Delta P_{i2}, \sigma_i^\circ)]$ с точки зрения принимаемого решения $U = d_k$, (обобщением $[(\Delta P_{i1}, \sigma_i^\circ)\ (\Delta P_{i2}, \sigma_i^\circ)]$ является $(Pi^{об}, \sigma_i^\circ)$.

Для объекта с дискретным параметром.

Пусть для дискретного параметра Pi выполняется условие:

$$\Delta P_{i1} \to (U_1 = d_k) \text{ и } \Delta P_{i2} \to (U_2 = d_k),$$

где: ΔP_{i1} и ΔP_{i2} – интервалы значения параметра Pi; U_1, U_2 - принимаемые решения в соответствующих интервалах значения P_i, d_k – присваиваемое содержание (или значение) принимаемое решениями U_1, U_2 по управлению, которые нормализуют значения Pi в заданных интервалах. Пусть (P_{i1}, P_{i2}) значения P_i с внутренней стороны двух интервалов ΔP_{i1} и ΔP_{i2}.

Тогда при $U_1 \equiv U_2$ можно обобщить значения параметра Pi: $P_{i1} \oplus P_{i2}$ и оно будет равняться $\Delta P_{i1} + \Delta P_{i2} + \Delta(P_{i2} - P_{i1})$, т.е.

$$Pi^{об} = P_{i1} \oplus P_{i2} = \Delta P_{i1} \cup \Delta P_{i2} \cup \Delta(P_{i2} - P_{i1}),$$

где по обозначению $P_{i1} = \Delta P_{i1}$, $P_{i2} = \Delta P_{i2}$.

Отсюда выражение: ($Pi^{об}$) является обобщением [ΔP_{i1}, ΔP_{i2}] с точки зрения принимаемого решения $U = d_k$, (обобщением [ΔP_{i1}, ΔP_{i2}] является ($Pi^{об}$).

Следствие 1 постулата 1. В частности интервалы значений Pi могут стягиваться в точку $\Delta P_{i1} \to P_{i1}$ и $\Delta P_{i2} \to P_{i2}$.

Следствие 2 постулата 1. В частности интервалы значений Pi могут быть близкими друг к другу: $P_{i2} - P_{i1} \to 0$.

Свойства 1. Для обобщения различных интервалов значений параметра Pi: ΔP_{i1}, ΔP_{i2}, ΔP_{i3} выполняется свойство коммутативности: $(\Delta P_{i1} \oplus \Delta P_{i2}) \neq (\Delta P_{i2} \oplus \Delta P_{i1})$ и ассоциативности: $(\Delta P_{i1} \oplus \Delta P_{i2} \oplus \Delta P_{i3}) = (\Delta P_{i1} \oplus \Delta P_{i2}) \oplus \Delta P_{i3}) = (\Delta P_{i1} \oplus (\Delta P_{i2} \oplus \Delta P_{i3}))$.

Постулат 2. Постулат, который является более сложной *аксиомой*, имеет два варианта ее формулировки.

Вариант 1. Для описания S, соответствующего описанию состояния объекта по значениям $P = \{Pi_1\}$, i = 1, n с характеристиками $\chi(S) = (\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4, \chi_5, \chi_6, \chi_7, \chi_8, \chi_9, \chi_{10}, \chi_{11}, \chi_{12}, \chi_{13}, \chi_{14})$ в требованиях [1-4] выполняются условия аддитивности. Иначе говоря, семантика S равнозначна объединению семантики описания каждого P_i по отдельности, т.е. $S = \cup DPi\ [P_{i1}]$, которое является предложением Хорна [1-4].

Однако, такое представление описания состояния объекта является не всегда технологичным, поэтому рассматривается также вариант 2.

Вариант 2. Семантическая сила (т.е. однозначность интерпретации, полнота и точность описания состояния ОУ) всех вариантов описаний состояний объекта S по значениям $P = \{Pi_1\}$, i = 1, n с характеристиками $\chi(S) = (\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4, \chi_5, \chi_6, \chi_7, \chi_8, \chi_9, \chi_{10}, \chi_{11}, \chi_{12}, \chi_{13}, \chi_{14})$ в [1-4] равна семантической силе описания (представления описаний) состояния объекта в виде $S = \cup DPi\ [P_{i1}]$.

Свойства 1. Вариант представления состояний в виде $S = \cup DPi[P_{i1}]$ является рабочим для процедурной обработки, но не технологичным с точки зрения принятия решении по ним.

Теория и правила выводов формальной системы процессов управления объектом.

На основе приведенных аксиом докажем истинность следующих утверждений и теорем.

Утверждение 1. Формула/теорема G называется *логическим следствием* формул/аксиом $F_1, F_2, ..., F_k$, если для любой интерпретации j из того, что $j(F_1)=j(F_2)=...=j(F_k)=1$ следует, что $j(G)=1$.

Утверждение 2. Множество формул/аксиом $\{F_1, F_2, ..., F_k\}$ называется *выполнимым*, если существует интерпретация j такая, что $j(F_1)=j(F_2)=...=j(F_k)=1$.

Перед тем, чтобы приступить к доказательству теорем предварительно приведем лемму, которая определяет условия доказуемости теоремы в рамках исходных утверждений.

Лемма 1. Формула/теорема G является логическим следствием формул/аксиом $F_1, F_2, ..., F_k$ тогда и только тогда, когда множество формул/(аксиом и теоремы) $L=\{F_1, F_2, ..., F_k, \neg G\}$ невыполнимо.

Доказательство. Пусть формула G является следствием множества формул $F_1, ..., F_k$. Предположим от противного, что множество L выполнимо. Это означает, что существует интерпретация j такая, что $j(F_1)=...=j(F_k)=j(\neg G)=1$. Но если $j(F_1)=...=j(F_k)=1$, то $j(G)=1$, поскольку G – логическое следствие формул $F_1, ..., F_k$. Полученное противоречие $j(\neg G)=1$ и $j(G)=1$ доказывает, что множество формул $\{F_1, ..., F_k, \neg G\}$ невыполнимо.

Пусть теперь множество формул L невыполнимо. Рассмотрим интерпретацию j такую, что $(F_1)=...=j(F_k)=1$. Поскольку L невыполнимо, то $j(\neg G)=0$. Если $j(\neg G)=0$, то $j(G)=1$. Следовательно, из равенств $(F_1)=...=j(F_k)=1$ следует равенство $j(G)=1$. Это означает, что G — логическое следствие множества формул $F_1, ..., F_k$.

Доказательство теорем сводится к доказательству того, что некоторая формула G (гипотеза теоремы), является логическим следствием множества формул $F_1, ..., F_k$ (допущений). Т.е. сам текст теоремы может быть сформулирован

следующим образом «если $F_1,...,F_k$ истинны, то истинна и G». Такой метод доказательства теорем называется *методом резолюций*.

Как было показано ранее, задача о логическом следствии может быть сведена к задаче о выполнимости. Формула G есть логическое следствие формул $F_1,F_2,...,F_k$ тогда и только тогда, когда множество формул $\{F_1,F_2,...,F_k,\neg G\}$ невыполнимо. Метод резолюций как раз и занимается тем, что устанавливает невыполнимость такого множества формул.

Теорема 1. Теорема об обобщении - «обобщение пар ситуаций».

Если даны ситуации S_1 и S_2, описания которых совершенны и структура которых такова: $S_1 = \{DPi_1[Pi_1], i = 1, n\}$ и $S_2 = \{DPi_2[Pi_2], i = 1, n\}$, соответственно, то их обобщение $S_1 \oplus S_2$ имеют вид

$$S_{12}^{об} = \{DPi[(P_{i1} \oplus P_{i2})], i = 1,n\},$$

где DPi – информационная часть переменного Pi; $[Pi_1]$ – значение Pi в составе описания ситуации.

Доказательство теоремы 1. *Необходимое и достаточное условие прямого доказательства.* Описания ситуаций S_1 и S_2 состоят из значений измеряемых параметров $P = \{Pi_1\}$, i = 1, n.

Поэтому согласно аксиоме 4 их описания можно представить виде предложения Хорна $S_1 = \{DPi_1[Pi_1], i = 1, n\}$ и $S_2 = \{DPi_2[Pi_2], i = 1, n\}$.

Согласно аксиоме 5 результат обобщения описания в формате Хорна также представляется в виде Хорна $S_{12}^{об} = \{DPi[(P_{i1} \oplus P_{i2})], i = 1, n\}$, что и требовалось доказать.

Доказательство от противного. Пусть $S_{12}^{об} = \{DPi[(P_{i1} \oplus P_{i2})], i = 1, n\}$ не является результатом обобщения S_1 и S_2.

Это может быть только тогда, когда описания S_1 и S_2 не являются совершенными и не сводятся к предложению Хорна. А это противоречит условиям теоремы, что и является не допустимым.

Утверждение 3. Обобщенная ситуация $S_{12}^{об}$ имеет те же свойства, что и исходные S_1 и S_2, если у них свойства совпадают, иначе для свойства обобщенной ситуации $S_{12}^{об}$ выполняется операция объединения исходных свойств.

Следствие 2. Если исходные ситуации S_1 и S_2 совершенные, то обобщенная ситуация $S_{12}^{об}$ также является совершенной.

Приведенные аксиомы, теоремы и их следствия позволяют построить процедуры и алгоритмы, обеспечивающие корректное описание текущих ситуаций на микро-уровне и обобщение ситуации и формировать класс ситуаций и решения на макро-уровне, а также правильно определить управляющие решения для текущих ситуаций. Эти процедуры и алгоритмы, входя в состав метода ситуационно-группового управления СО, тем самым составляют его основу.

Теорема 2. Теорема инвариантности структуры обобщенной ситуации $S_{12}^{об}$ структуре ситуаций S_1 и S_2.

Обобщенная ситуация также является совершенной и инвариантной по структуре к исходным ситуациям.

При обобщении описания ситуации S_1 и S_2 преобразуется в предложение Хорна: $S_1 = \{DPi_1[Pi_1], i = 1, n\}$ и $S_2 = \{DPi_2[Pi_2], i = 1, n\}$, а полученный результат также в формате предложения Хорна будет представлен: $S_{12}^{об} = \{DPi[(P_{i1} \oplus P_{i2})], i = 1, n\}$.

При этом операция обобщения состояния состоит из объединения по координатного (параметрического) обобщения значения переменных DPi[(Pi1 ⊕ Pi2)] без переноса величины результата обобщения по одному компоненту на другой компонент при его обобщении. Отсюда, вытекает, что количество элементов не изменится, изменится только их диапазон значений.

Тем самым теорема доказана.

Теорема 3. Вторая теорема обобщения «обобщение произвольного количества ситуаций».

Если даны ситуаций $S_J = \{S_1, S_2, S_3, \ldots, S_i, \ldots, S_n\}$, описания которых совершенны (т.е. сводимо к предложению Хорна) и имеют следующую структуру $S_j = \{DPi_j[Pi_j], i = 1,n; j = 1,m\}$, соответственно, то их обобщения $\oplus S_i$ имеют вид: $SJ^{об} = \{DPi[(\oplus P_{ij})], i = 1,n; j = 1,m\}$, где DPi – информационная часть переменного Pi, $[Pi_1]$ – значение Pi в составе описания ситуации.

Доказательство теоремы 2. Доказательство проведем методом индукции.

1. **Случай 1.** Пусть $SJ = \{S_1, S_2\}$ состоит из пары ситуаций. Тогда доказательство теоремы 2 сводится к доказательству теоремы 1.

2. **Случай 2.** Пусть $SJ = \{S_1, S_2, S_3\}$ состоит из трех ситуаций. Тогда теорему докажем для пары $\{S_1, S_2\}$ также, как для теоремы, которая доказана путем сведения к доказательству тео-

ремы 1, в результате которой будет получена первая ступень обобщения $S_{12}^{об}$.

В связи с тем, что ситуации $\{S_1, S_2\}$ совершенные, то их обобщение $S_{12}^{об}$ согласно следствия 2 также будет совершенной ситуацией и инвариантной по структуре.

Далее требуется доказательство теоремы для пары $\{S_{12}^{об}, S_3\}$. Обобщение этой пары будет имеет вид: $S_{123}^{об} = \{DPi[(P_{i1} \oplus P_{i2})], i = 1,n\}$.

Согласно теореме 2 структуры описания обоих ситуаций $S_{12}^{об}$ и S_3, совершенны и тождественны по структуре. Поэтому результат обобщения будет $S_{123}^{об}$ и доказательство сводится к теореме 1.

Тем самым доказательство справедливости результатов обобщений доказано для случая 3-х ситуаций, т.е. для описания 3-х состоянии объекта.

3. **Случай 3.** Пусть $SJ = \{S_1, S_2, S_3, \ldots, S_i, S_{i+1}\}$ состоит из i+1 ситуаций. Пусть теорема доказана для i количества ситуаций и результатом обобщения будет: $S_{1\text{-}i}^{об} = \{DPi[(P_{i1} \oplus P_{i2})], i = 1,n\}$.

Тогда теорему докажем для пары $\{S_{1\text{-}i}^{об}, S_{i+1}\}$. Доказательство будет сводится к доказательству теоремы 1, в результате которой будет получена первая ступень обобщения $S_{1\text{-}i+1}^{об}$ или $S_{2\text{-}i}^{об}$.

Тем самым доказательство справедливости результатов обобщении доказано для случая i+1 описаний состояний объекта.

Отсюда вытекает полное доказательство теоремы 3.

Заключение. Приведены аксиомы, теоремы и правила выводов прикладной формальной системы, которая формализует процессы управления в проблемной области управления сложным объектом.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Куандыков А.А.* Аксиоматическое построение теоретических основ управление сложными объектами. Ч. 1. // Поиск. 2007. № 4. С. 224-229.

2. *Куандыков А.А.* Аксиоматическое построение теоретических основ управление сложными объектами. Ч. 2 // Поиск. 2007. № 4. С. 229-234.

3. *Куандыков А.А.* Аксиоматическое построение теоретических основ управление сложными объектами. Ч. 3 // Поиск. 2008. № 2. С. 216-219.

4. *Куандыков А.А.* Аксиоматическое построение теоретических основ управление сложными объектами. Ч. 4 // Поиск. 2008. № 2. С. 219-222.

Резюме

Күрделі объектілерді, оның ішінде компьютерлік жүйені басқару процестерін өрнектейтін қолданбалы формальді жүйенің аксиомалары, теоремалары мен табыстау әдістері келтірілген.

Summary

The presented the axioms, theorems and rules of applied formal system of conclusions, which formalize the processes of difficult object management, including computer systems.

КазНТУ им. К. И. Сатпаева,
г. Алматы

Поступила 19.09.09г.