

(Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Республика Казахстан)

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ СЖАТО-СКРУЧЕННОЙ БУРОВОЙ ШТАНГИ

**Аннотация.** Исследуется динамика буровых штанг, применяемых для бурения нефтяных и газовых скважин. Рассмотрен случай вращающейся буровой штанги, подверженной действию осевой нагрузки и крутящего момента. Предложена численная модель сжато-скрученной буровой штанги. При решении ис-пользован метод, основанный на понижении порядка дифференциальных уравнений в частных производных с помощью введения новых переменных. Изучено влияние параметров штанги на амплитуду ее поперечных колебаний.

**Ключевые слова:** буровая штанга, динамическая модель, поперечные колебания, явная схема.

**Тірек сөздер:** бұрғылау қарнағы, серпінді үлгі, көлденең ауытқулар, айқын сызба.

**Keywords:** boring bar, dynamic model, cross fluctuations, explicit scheme.

Известно, что эффективность работы буровых машин во многом зависит от несущей способности буровых штанг. При увеличении длины буровая штанга становится гибкой и неспособной передавать усилия на долото, необходимые для разрушения горных пород. Потеря прямолинейной формы оси штанги может привести к колебательным процессам. В связи с этим изучение устойчивости, прочности и колебаний буровых штанг имеет как научный, так и практический интерес.

Целью работы является исследование динамической модели поперечных колебаний сжато-скрученной буровой штанги неглубинного бурения с распределенными параметрами и ее численная дискретизация.

Рассматривается вращательное движение буровой штанги под действием сжимающего продольного усилия  $N(t)$  и крутящего момента  $M(t)$ . Исследуются ее поперечные колебания. Колебания полагаются малыми. Вращающаяся сжато-скрученная буровая штанга рассматривается как одномерный стержень длиной  $l$ , динамическая модель которого представлена как:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EJ_v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ M(x,t) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ N(x,t) \frac{\partial v}{\partial x} \right] + K_1 v &= \frac{\gamma F}{g} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EJ_u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ M(x,t) \frac{\partial v}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ N(x,t) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + K_1 u &= \frac{\gamma F}{g} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $K_1 = \frac{\gamma F \omega^2}{g}$ ;  $\gamma = \rho \cdot g$  – удельный вес материала штанги;  $\rho$  – плотность материала;  $F$  – площадь поперечного сечения буровой штанги;  $g$  – скорость свободного падения;  $EJ_u, EJ_v$  – жесткость штанги относительно осей  $y, z$ ;  $u$  – перемещение точек упругой линии штанги в плоскости  $xOy$ ;  $v$  – перемещение точек упругой линии штанги в плоскости  $xOz$ ;  $\omega$  – частота вращения.

Система (1) задает динамическое состояние изогнутой оси буровой штанги. В основе модели лежит гипотеза плоских сечений [1]. Предполагаем, что поперечные сечения стержня при деформации остаются плоскими и перпендикулярными к его деформированной оси, а нормальные напряжения на площадках, параллельных оси, являются пренебрежимо малыми. Растяжением оси стержня пренебрегаем.

Рассматривая шарнирное опирание штанги по концам, задаются краевые условия:

$$\begin{aligned} u(x,t) = v(x,t) = 0 \quad (x = 0, x = l) \\ EJ_u \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = EJ_v \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} = 0 \quad (x = 0, x = l). \end{aligned} \quad (2)$$

Полагается, что на штангу в процессе бурения действует равномерно распределенная по ее длине продольная сжимающая нагрузка  $N$ . Силы сопротивления со стороны твердой породы и трения о стенки скважины преодолеваются за счет действия крутящего момента  $M$ , который предполагается постоянным во времени. Осевая нагрузка  $N$  состоит из суммы постоянной и переменной во времени слагаемых:

$$N(t) = N_0 + N_t \cdot \Phi(t), \quad (3)$$

где  $N_0$  – постоянная во времени составляющая сжимающей нагрузки;  $N_t$  – переменная во времени составляющая;  $\Phi(t)$  – периодическая функция времени, характеризующая режим нагружения.

В качестве функции  $\Phi(t)$  берется функция, соответствующая гармоническому воздействию:

$$\Phi(t) = \cos(\omega t).$$

(4)

Далее предполагаем, что жесткость штанги относительно осей  $y$  и  $z$  постоянна по длине, т.е.

$$EJ_u = EJ_v = EJ = const. \quad (5)$$

Тогда уравнения поперечных колебаний сжато-скрученного стержня под действием внешних нагрузок принимают вид:

$$\begin{aligned} EJ \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + M \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + N(t) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + K_1 v &= \frac{\gamma F}{g} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ EJ \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - M \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + N(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + K_1 u &= \frac{\gamma F}{g} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (6)$$

Решение модели (6) основывается на понижении порядка дифференциальных уравнений в частных производных путем введения новых переменных. Для удобства вводятся обозначения:

$$a^2 = \frac{EJ}{\gamma F / g}, \quad b^2 = \frac{M}{\gamma F / g}, \quad c^2 = \frac{N(t)}{\gamma F / g}, \quad (7)$$

а также по аналогии с [2] вводятся следующие новые переменные:

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{\partial v}{\partial t}, \quad w_1 = a \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + c \frac{\partial v}{\partial x} + \omega \cdot v, \quad z_1 = b \frac{\partial u}{\partial x}, \\ s_2 &= \frac{\partial u}{\partial t}, \quad w_2 = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c \frac{\partial u}{\partial x} + \omega \cdot u, \quad z_2 = b \frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned} \quad (8)$$

Подставляя (8) в (6) и проводя соответствующие преобразования, получаем эквивалентную (6) систему из шести дифференциальных уравнений второго порядка с распределенными параметрами. Ввиду ее громоздкости здесь она не представлена. Решение последней не представляет труда. Численное моделирование производится путем аппроксимации полученных уравнений с применением разностных схем [3]. Используется явная схема. Для этого вводятся сетки по переменной  $x$  с шагом  $h$  и переменной  $t$  с шагом  $\tau$ :

$$\begin{aligned} \omega_h &= \{x_i = ih; i = 0, 1, \dots, N; hN = l\}, \\ \omega_\tau &= \{t_n = n\tau; n = 0, 1, \dots, M; \tau M = t\}, \end{aligned} \quad (9)$$

здесь  $N$  – количество шагов сетки по пространству,  $M$  – количество шагов по времени.

Граничные условия (2) после аппроксимации принимают вид:

$$\begin{aligned} u_0^{n+1} &= u_N^{n+1} = 0, \\ v_0^{n+1} &= v_N^{n+1} = 0, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x=0}^{n+1} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x=l}^{n+1} = 0, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \Big|_{x=0}^{n+1} &= \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \Big|_{x=l}^{n+1} = 0, \quad n = 0, \dots, M-1, \end{aligned} \quad (10)$$

а в переменных (8) представляются следующим образом:

$$\begin{aligned}
s_{1,0}^{n+1} &= \frac{v_0^{n+2} - v_0^{n+1}}{\tau}, & s_{2,0}^{n+1} &= \frac{u_0^{n+2} - u_0^{n+1}}{\tau}, \\
z_{1,0}^{n+1} &= b \frac{u_1^{n+1} - u_0^{n+1}}{h}, & z_{2,0}^{n+1} &= b \frac{v_1^{n+1} - v_0^{n+1}}{h}, \\
w_{1,0}^{n+1} &= a \frac{\mathcal{J}\mathcal{D}^2 v \mathcal{U}}{\mathfrak{I}\partial x^2 \mathcal{U}} + c \frac{v_1^{n+1} - v_0^{n+1}}{h} + \omega \mathcal{U}_0^{n+1}, \\
w_{2,0}^{n+1} &= a \frac{\mathcal{J}\mathcal{D}^2 u \mathcal{U}}{\mathfrak{I}\partial x^2 \mathcal{U}} + c \frac{u_1^{n+1} - u_0^{n+1}}{h} + \omega \mathcal{U}_0^{n+1}, \\
s_{1,N}^{n+1} &= \frac{v_N^{n+2} - v_N^{n+1}}{\tau}, & s_{2,N}^{n+1} &= \frac{u_N^{n+2} - u_N^{n+1}}{\tau}, \\
z_{1,N}^{n+1} &= b \frac{u_N^{n+1} - u_{N-1}^{n+1}}{h}, & z_{2,N}^{n+1} &= b \frac{v_N^{n+1} - v_{N-1}^{n+1}}{h}, \\
w_{1,N}^{n+1} &= a \frac{\mathcal{J}\mathcal{D}^2 v \mathcal{U}}{\mathfrak{I}\partial x^2 \mathcal{U}} + c \frac{v_N^{n+1} - v_{N-1}^{n+1}}{h} + \omega \mathcal{U}_N^{n+1}, \\
w_{2,N}^{n+1} &= a \frac{\mathcal{J}\mathcal{D}^2 u \mathcal{U}}{\mathfrak{I}\partial x^2 \mathcal{U}} + c \frac{u_N^{n+1} - u_{N-1}^{n+1}}{h} + \omega \mathcal{U}_N^{n+1}, \\
n &= 0, \dots, \mathbf{M} - 2.
\end{aligned} \tag{11}$$

Начальные условия аппроксимируются как:

$$\begin{aligned}
u_i^0 &= v_i^0 = 0, \\
\frac{u_i^1 - u_i^0}{\tau} &= C_1, & \frac{v_i^1 - v_i^0}{\tau} &= C_2, \quad i = 0, \dots, \mathbf{N},
\end{aligned} \tag{12}$$

тогда в переменных (8) они имеют вид:

$$\begin{aligned}
s_{1,i}^0 &= \frac{v_i^1 - v_i^0}{\tau}, & s_{2,i}^0 &= \frac{u_i^1 - u_i^0}{\tau}, \\
z_{1,i}^0 &= b \frac{u_{i+1}^1 - u_{i-1}^0}{2h}, & z_{2,i}^0 &= b \frac{v_{i+1}^1 - v_{i-1}^0}{2h}, \\
w_{1,i}^0 &= a \frac{v_{i+1}^0 - 2v_i^0 + v_{i-1}^0}{h^2} + c \frac{v_{i+1}^1 - v_{i-1}^0}{2h} + \omega \mathcal{U}_i^0, \\
w_{2,i}^0 &= a \frac{u_{i+1}^0 - 2u_i^0 + u_{i-1}^0}{h^2} + c \frac{u_{i+1}^1 - u_{i-1}^0}{2h} + \omega \mathcal{U}_i^0, \\
i &= 1, \dots, \mathbf{N} - 1.
\end{aligned} \tag{13}$$

Несмотря на то, что производная по  $x$  берется с верхнего слоя, схема остается явной; так как  $w^{n+1}$  и  $z^{n+1}$  вычисляются явно из первых уравнений данной системы.

Расчет колебаний выполняется по формулам:

$$\begin{aligned}
u_i^{n+2} &= u_i^{n+1} + \tau \cdot s_{2,i}^{n+1}, \\
v_i^{n+2} &= v_i^{n+1} + \tau \cdot s_{1,i}^{n+1}, \quad i = 1, \dots, \mathbf{N} - 1; n = 0, \dots, \mathbf{M} - 2.
\end{aligned} \tag{14}$$

Шаг по времени  $\tau$  задается равным  $\frac{h^2}{2a}$ .

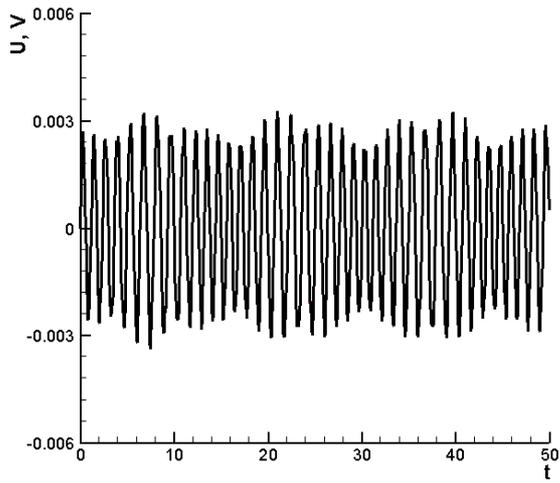
Проведен численный анализ динамической модели буровой штанги. Все расчеты проводились на языке программирования C++ при следующих значениях параметров: внешний диаметр штанги  $D = 0,2$  м, внутренний диаметр  $d = 0,12$  м, крутящий момент  $M = 10^4$  Нм, продольная сила  $N = 2,2 \cdot 10^6$  Н. Рассмотрены стальные и дюралюминиевые буровые штанги с характеристиками модуля упругости стали и дюралюминия  $E_{ст} = 2,1 \cdot 10^5$  МПа и  $E_{дюр} = 0,7 \cdot 10^5$  МПа, соответственно, и плотностью стали  $\rho_{ст} = 7800 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$  и дюралюминия  $\rho_{дюр} = 2700 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ .

Рассмотрен случай переменной продольной силы  $N(t) = 1,8 \cdot 10^6 + 0,4 \cdot 10^6 \cos(\omega t)$ . Она разложена, соответственно, на постоянную и переменную во времени слагаемые. Полагая скорость вращения штанги  $\omega = 25$  об/мин, построены графики амплитуды колебаний срединного сечения буровой штанги в зависимости от ее длины (рисунок 1).

Исследовано влияние материала буровой штанги на амплитуду ее колебаний. Установлено, что дюралюминиевая буровая штанга имеет меньшую амплитуду колебаний (рисунок 2). Исследовано распределение колебаний по длине штанги. На рисунке 3 представлена форма изгиба штанги в момент времени  $t = 40$  сек. при частоте вращения штанги  $\omega = 30$  об/мин.

Полученные графики показывают, что буровые штанги, изготовленные из дюралюминия, подвергаются меньшим изгибным деформациям, чем штанги, изготовленные из стали. Амплитуда их изгибных колебаний примерно в 1,5–3 раза меньше. Также заметно влияние длины и угловой скорости вращения на плоский изгиб буровой штанги. При увеличении длины, несмотря на уменьшение частоты вращения, происходит возрастание величины прогиба, как у стальных, так и у дюралюминиевых штанг и меняется его форма.

Увеличение частоты вращения буровой штанги также влечет за собой возрастание амплитуды поперечных колебаний и длины их волн. Однако влияние данного параметра оказывается неодинаковым для штанг различной длины – по мере удлинения штанга становится более чувствительной к изменению частот и повышается риск потери устойчивости системы.



a)

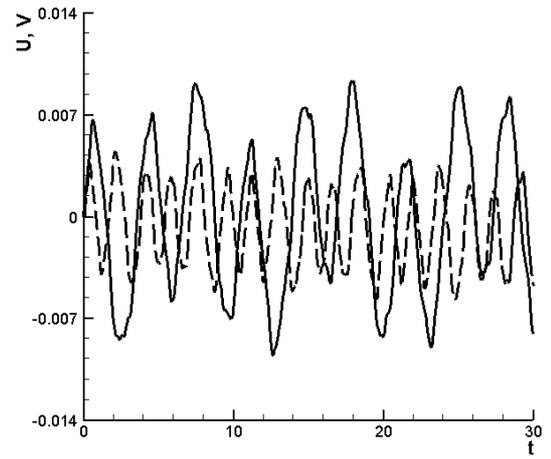


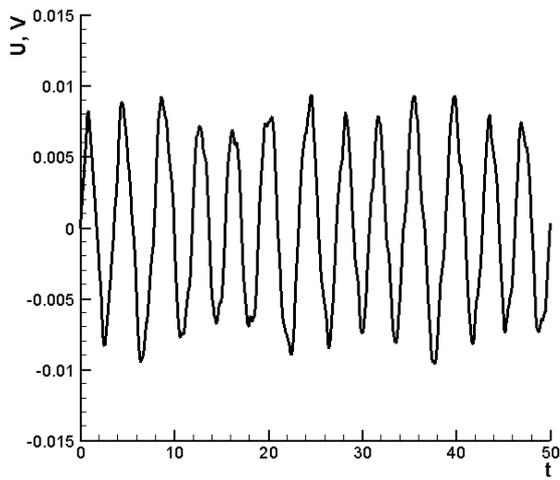
Рисунок 2 – Влияние материала на колебания

при  $l = 150$  м,  $\omega = 70$  об/мин.

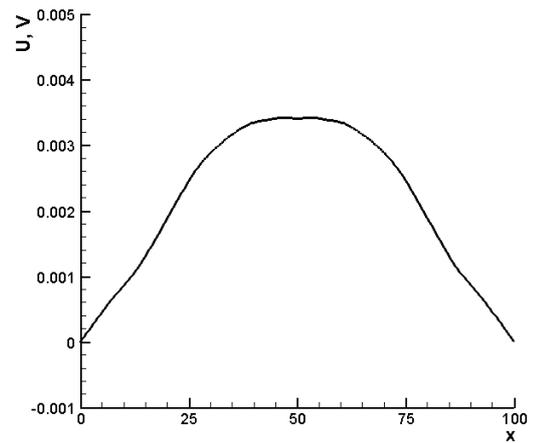
— — — — —

сталь,

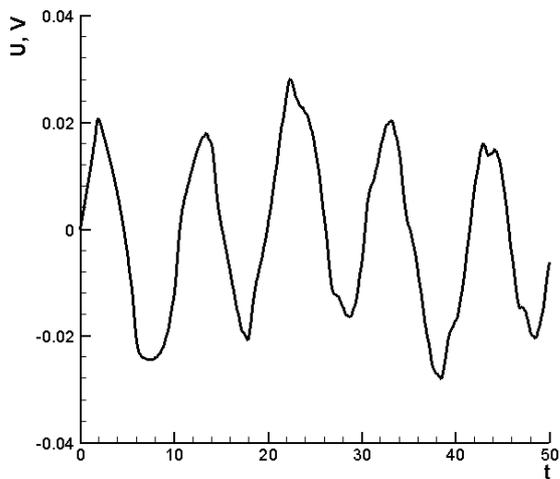
дюралюминий



б)



a)



в)

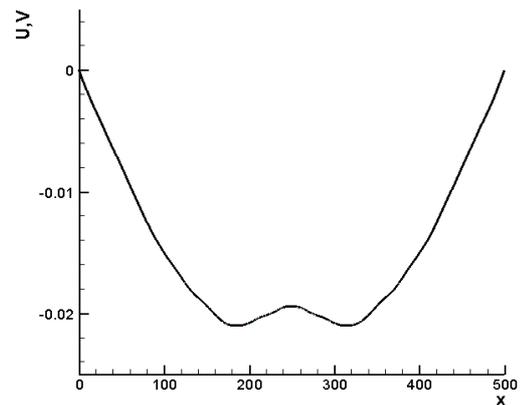


Рисунок 1 – Поперечные колебания  
буровой штанги ,  
при а)  $l = 70$  м, б)  $l = 200$  м, в)  $l = 450$  м

б)

Рисунок 3 – Плоский изгиб буровой штанги  
а)  $l = 100$  м, б)  $l = 500$  м

## ЛИТЕРАТУРА

- 1 Вибрации в технике. Справочник: в 6-ти т. – М.: Машиностроение, 1978. – Т. 1 – 352 с.
- 2 Кукуджанов В.Н. Компьютерное моделирование деформирования, повреждаемости и разрушения неупругих материалов и конструкций: Учебное пособие. – М.: МФТИ, 2008. – 215 с.
- 3 Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы: Учеб. пособие для вузов. – М.: Наука, 1989. – 432 с.

## REFERENCES

- 1 *Vibracii v tehnike, Spravochnik v 6-ti t. M., Mashinostroenie, 1978, T.1., 352 (in Russ.)*.
- 2 *Kukudzhanov V.N. Komp'yuternoe modelirovanie deformirovaniya, povrezhdaemosti i razrusheniya neuprugih materialov i konstrukcij, Uchebnoe posobie. M., MFTI, 2008, 215 (in Russ.)*.
- 3 *Samarskij A.A., Gulin A.V. Chislennye metody, Ucheb. posobie dlja vuzov. M., Nauka, 1989, 432 (in Russ.)*

## Резюме

*А. Қ. Құдайбергенов, Асх. К. Құдайбергенов, Л. А. Хаджиева*

(әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан Республикасы)

# ҚЫСАҢ-ШИРАТПА БҰРҒЫЛАУ ҚАРНАҒЫНЫҢ ТЕРБЕЛІСТЕРІН САНДЫҚ ҮЛГІЛЕУ

Мұнай ұнғымасын бұрғылау үшін қолданылатын бұрғылау қарнағының динамикасы зерттелді. Білікке түсетін жүк-салмақ және бұрау моменті әсерімен айналмалы бұрғылау қарнағының қозғалысы қаралды. Сығылған және бұралған бұрғылау қарнағының сандық үлгісі ұсынылды. Штанга параметрлерінің ықпалы оның көлденең ауытқуларының шегіне зерттелді.

**Тірек сөздер:** бұрғылау қарнағы, серпінді үлгі, көлденең ауытқулар, айқын сызба.

## Summary

*A. Kudaibergenov, Askh. Kudaibergenov, L. Khadjiyeva*

(al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Republic of Kazakhstan)

## NUMERICAL MODELLING OF SQUEEZED AND TWISTED BORING BAR FLUCTUATIONS

Dynamics of boring bars applied to drilling oil wells is investigated. The case of the rotating bar subjected to influence of an axial load and twisting moment was considered. Numerical model of the twisted and squeezed boring bar was proposed. Impact of the bar parameters on the amplitude of its cross fluctuations was studied.

**Keywords:** boring bar, dynamic model, cross fluctuations, explicit scheme.

*Поступила 15.10.2013 г.*