УДК 532.685

М. Р. КУЛИМАНОВА

О КАЧЕСТВЕННЫХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ПРОТИВОТОЧНОЙ КАПИЛЛЯРНОЙ ПРОПИТКИ

(Представлена академиком НАН РК Н. К. Блиевым)

Рассматриваются свойства решений одной задачи противоточной капиллярной пропитки: асим-птотическое поведение решения при неограниченном возрастании времени и периодическое по времени решения. Доказательства проведены на примере однофазной задачи Стефана. С помощью автомодельных решений установлено, что при неограниченном возрастании времени решение нестационарной задачи стремится к решению соответствующей стационарной задачи.

Предполагается выполнение математической модели Раппопорта-Лиса в случае $\vec{u}_1 = -\vec{u}_2$, т.е. вода (вытесняющий агент) впитывается в образец, вытесняя нефть в направлении, противоположном движению воды, где $\vec{u}_i$, $i = 1,2$ – скорости воды и нефти. Тогда соответствующее уравнение относительно водонасыщенности принимает вид

$$m \cdot \frac{\partial S}{\partial t} = div(\Phi(S) \cdot \nabla S) + f(x,y,t), \qquad (1)$$

где m – пористость; $\Phi(S) = -\dfrac{f_1 \cdot f_2}{f_1 + \mu \cdot f_2} \cdot J'(S) \geq 0$ – функция, зависящая от поведения функций f_i, $i = 1,2$, и $J(S)$. Последнее неравенство выполняется для гидрофильной среды. Описание процесса противоточной капиллярной пропитки приведено в работе [1], а также исследована соответствующая математическая задача в одномерном случае. В настоящей работе в двумерном случае на основе результатов работ [2–3] исследована однофазная задача типа Стефана. Кроме того, исходя из результатов работы [3, 4] изучены асимптотическое поведение решения при $t \to \infty$ и периодические по времени решения относительно уравнения (1).

Постановка задачи. Не умаляя общности, считаем, что $m = 1$. Пусть (r,φ) – полярные координаты на плоскости. Находится двумерная область $G(t)$, ограниченная известной линией $r = R_0$ – радиус скважины и $r = R(\varphi,t), R_0 < R(\varphi,t)$ искомой линией и неотрицательная функция $\theta(r,\varphi,t)$. При этом уравнение (1) преобразованием $\theta = \int\limits_{s_*}^{s} \Phi(\varsigma) d\varsigma$ в полярной системе координат приводится к следующему виду:

$$a(\theta) \cdot \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \theta}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial \theta}{\partial \varphi}\right) + f(r,\varphi,t)$$

$$\text{при } (r,\varphi) \in G(t), \qquad (2)$$

на неизвестной границе выполняются условия:

$$\theta = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = \left(\frac{\partial \theta}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial \theta}{\partial \varphi}\right)^2 \text{ при } r = R(\varphi,t), \quad (3)$$

а на известной границе (на забое скважины) –

$$\theta = \theta_0 \text{ при } r = R_0. \qquad (4)$$

Коэффициент $a(\theta) \geq a_0 \equiv const > 0$ и $f(r,\varphi,t)$ являются известными и достаточно гладкими функциями. Кроме того, в начальный момент времени искомые функции удовлетворяют условию (3). Задача (2)–(4) решается преобразованием исходной области в прямоугольную.

Теорема 1. Пусть $a(\theta) \in C^2[0,\infty)$, $U_1(\varphi) \in C^{2+\alpha}[0,2\pi]$ и $U_0^2 \cdot a_0 > 2$, где $U_0 = \text{const} > 0$. Тогда при достаточном малом σ, $\theta = \theta_1(\varphi, \frac{r}{\sqrt{t}})$, $R = t^{-1/2} \cdot U_2(\varphi)$ с периодическим по φ с периодом 2π дважды непрерывно дифференцируемыми соответственно в областях $\Pi = \{\varphi : 0 < \varphi < 2\pi\}$ и $Q = \{(\varphi,\xi) : 0 < \varphi < 2\pi,\ U_0 + \sigma \cdot U_1(\varphi) < \xi < U_2(\varphi)\}$ функциями $U_2(\varphi)$ и $\theta(\varphi,\xi)$, где постоянная σ зависит только от a_0, U_0, θ_0 и нормы функции $U_1(\varphi)$ в пространстве $C^{2+\alpha}[\overline{\Pi}]$.

Исходя из результатов работы [2] для доказательства теоремы вводятся переменные Мизеса:

$$\tau = t, \quad x = \varphi, \quad y = \theta(\varphi,r,t).$$

Тогда области $G(t)$ соответствует область $\Omega = \{(x,y):\ 0 < x < 2\pi, 0 < y < \theta_0\}$, а новая искомая функция $u(x,y,\tau) = r$ удовлетворяет в Ω уравнению

$$a(y)\cdot\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{u_x}{u^2}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{u^2}\cdot\left(1+\frac{u_x^2}{u^2}\right)\right] + \frac{1}{u} = 0 \quad (5)$$

и краевым условиям

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{1}{u_y}\cdot\left(1+\frac{u_x^2}{u^2}\right) = 0 \text{ при } y = 0, \quad (6)$$

$$u = \tau^{1/2}\cdot[U_0 + \sigma\cdot U_1(\varphi)] \text{ при } y = \theta_0. \quad (7)$$

Методом разделения переменных по времени и пространственным переменным получаем следующую задачу:

$$\Lambda_1 U \equiv \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{U_y}\left(1+\frac{U_x^2}{U^2}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{U_x}{U^2}\right] + \frac{1}{U} + \frac{a\cdot U}{2} = 0$$

$$\text{при } (x,y)\in\Omega \quad (8)$$

$$\Lambda_2 U \equiv \frac{U}{2} + \frac{1}{U_y}\left(1+\frac{U_x^2}{U^2}\right) = 0 \text{ при } y = 0, \quad (9)$$

$$\Lambda_3 U \equiv U_0 + \sigma\cdot U_1(x) = U \text{ при } y = \theta_0. \quad (10)$$

Решение задачи (8) – (10) получается с помощью теоремы о неявной функции при малых возмущениях одномерной задачи Стефана в автомодельных переменных.

Асимптотическое поведение решения при неограниченном возрастании времени. Рассмотрим задачу Коши для уравнения (1) в области $Q = \{t \ge 0, -\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty\}$

$$s(t,x,y)\big|_{t=0} = s_0(x,y) \quad (11)$$

и краевую задачу в области $P = \{t \ge 0, R = ax + by \ge 0\}$

$$s(t,x,y)\big|_{t=0} = s_0(x,y),\ s(t,x,y)\big|_{R=0} = s_1(t,x,y), \quad (12)$$

где $\lim\limits_{R\to\pm\infty} s_0(x,y) = s_\pm = \text{const} > 0$, $\lim\limits_{t\to\infty} s_1(t,x,y) = s_1 = \text{const} > 0$. Как и в одномерном случае [1], нетрудно показать, что для конечной области изменения пространственных переменных решение нестационарной краевой задачи стабилизируется при неограниченном возрастании времени и сходится в силу единственности решения к решению соответствующей стационарной задачи.

Из результатов работы [3] ниже доказывается оценка скорости сходимости решений задач (1), (11) и (1), (12) к автомодельным решениям $\tilde{s} = \tilde{s}\left(\frac{ax+by}{\sqrt{t+1}}\right)$, зависящим только от переменной $\varsigma = \frac{ax+by}{\sqrt{t+1}}$ и удовлетворяющим обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$\frac{d^2\tilde{s}}{d\varsigma^2} + \frac{\varsigma\cdot\psi_s'}{2(a^2+b^2)}\cdot\frac{d\tilde{s}}{d\varsigma} = 0. \quad (13)$$

Теорема 2. Пусть $s_0(x,y)$ ограничена и существуют такие постоянные a, b, что $s_0(x, \frac{R-ax}{b}) \to s_\pm$ при $R = ax + by \to \pm\infty$ равномерно относительно $x \in (-\infty, +\infty)$. Тогда для решения задачи Коши (1), (11) имеем

$$\lim_{t\to\infty}\left|s(t,x,y) - \tilde{s}\left(\frac{R}{\sqrt{t+1}}\right)\right| = 0$$

равномерно по $(x,y)\in E = \{-\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty\}$.

Если для некоторого $N > 0$ выполняются неравенства

$$\tilde{s}(R-N) \le s_0(x,y) \le \tilde{s}(R+N),$$

то имеет место оценка

$$\left|s(t,x,y) - \tilde{s}\left(\frac{R}{\sqrt{t+1}}\right)\right| \le \frac{K}{\sqrt{t+1}},$$

где $K > 0$ – некоторая постоянная.

Полностью аналогично для решения задачи (1), (12) доказывается следующая

Теорема 3. Пусть решение краевой задачи (1), (12) с ограниченными на $\Gamma = \{t = 0, R = ax + by = 0\}$ значениями $s_0(x,y)$ и $s_1(t,x,y)$, причем существуют постоянные a, b, что равномерно по $(x,y)\in\Gamma$

$$\lim_{R\to\infty} s_0(x,y) = s_+,\quad \lim_{t\to\infty} s_1(t,x,y) = s_1.$$

Тогда равномерно по $R \ge 0$ для краевой задачи (1) (12) имеем

$$\lim_{t\to\infty}\left|s(t,x,y) - \tilde{s}\left(\frac{R}{\sqrt{t+1}}\right)\right| = 0,$$

где $\tilde{s}\left(\frac{R}{\sqrt{t+1}}\right)$ – автомодельное решение уравнения

(1), удовлетворяющее условию

$$\tilde{s}(0)=s_1, \qquad \tilde{s}(\infty)=s_+.$$

Если для некоторого $N>0$ выполняются неравенства

$$\tilde{s}\left(\frac{R-N}{\sqrt{t+1}}\right)\Bigg|_{\Gamma} \le s(t,x,y)\Big|_{\Gamma} \le \tilde{s}\left(\frac{R+N}{\sqrt{t+1}}\right)\Bigg|_{\Gamma},$$

то справедлива оценка

$$\left|s(t,x,y)-\tilde{s}\left(\frac{R}{\sqrt{t+1}}\right)\right| \le \frac{K}{\sqrt{t+1}},$$

где $K>0$ – некоторая постоянная, а при выполнении условий

$$\left|s_0(x,y)-\tilde{s}(R)\right| \le K_1\cdot e^{-\alpha\cdot R^2},$$

$$\left|s_1(t,x,y)-s_1\right| \le \frac{K_2}{(t+1)^{\gamma_1}}$$

имеет место оценка

$$\left|s(t,x,y)-\tilde{s}\left(\frac{R}{\sqrt{t+1}}\right)\right| \le \frac{K}{(t+1)^{\gamma}},$$

где $\gamma \le \min\left\{\frac{m}{2M},\gamma_1\right\}$, $m=\min\psi'(s)$, $M=\max\psi'(s)$.

Доказательство теорем 2, 3 основано на построении нижних и верхних барьерных функций и на применении принципа Хопфа – Зарембо – Жиро.

Замечание. Если на искомом решении уравнение (1) вырождается, то соответствующие автомодельные решения можно представить в виде предела монотонной ограниченной последовательности автомодельных решений, соответствующих невырожденному случаю. Тем самым полученные утверждения сохраняют свою силу и в случае вырождающегося уравнения вида (1). Полученные утверждения имеют место и в задачах многофазной фильтрации с учетом массообменных процессов.

Периодическое по времени решение. Исходя из результатов работы [2] вводится понятие обобщенного решения задачи (11)–(12) как периодической по t с периодом T функции $u(x,t)$ класса $W_2^{1,0}(\Omega_1)$, удовлетворяющей условиям (2) и интегральному тождеству

$$\int_{\Omega_1}\left\{-a(u)\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right\}dxdt=0 \qquad (14)$$

для всякой периодической по t с периодом T функции $\varphi(x,t)$ класса $W_2^{1,1}(\Omega_1)$, равной нулю при $x=0$ и $x=1$.

В (14) положено $a(u)=u$ при $u>0$ и $a(0)\in[-1,0]$; $\Omega_1=\Omega\times(0,T)$, где $u(x,t)=\int_{s_*}^{s}\Phi(\varsigma)d\varsigma$.

Пусть функции a_ε класса H^{l+1} аппроксимируют разрывную функцию $a(u)$ и таковы, что $a_\varepsilon'(u)\ge 1$.

Существование приближенных периодических решений $u_\varepsilon\in H^{l,l/2}(\overline{\Omega}_\infty)$, удовлетворяющих при каждом фиксированном $\varepsilon>0$ интегральному тождеству (14) с гладкой функцией a_ε и краевым условиям (12), следует из [3].

Стандартным образом из принципа максимума и простейших энергетических оценок, получающихся домножением дифференциального уравнения для $u_\varepsilon(x,t)$ соответственно на $(u-\tilde{u})$ и $\left(\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial\tilde{u}}{\partial t}\right)$, где $\tilde{u}=u_0(t)+x\cdot[u_1(t)-u_0(t)]$, и интегрированием по частям выводятся оценки

$$|u_\varepsilon|_{\Omega_\infty}^{(0)} \le |\tilde{u}|_{\Omega_\infty}^{(0)}=M_0,$$

$$\left\|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x},\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\right\|_{2,\Omega_1} \le C(M_0)\cdot\|\tilde{u}\|_{2,\Omega_1}^{(2)}=M_1. \qquad (15)$$

Обозначим $J_\varepsilon(t)=\int_0^1\left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}(x,t)\right|^2dx$. Воспользовавшись теоремой о среднем и оценкой (15), заключаем, что существует число $t_\varepsilon\in(0,T)$, такое, что

$$J_\varepsilon(t_\varepsilon)=\frac{1}{T}\int_0^T J_\varepsilon(t)dt \le M_1.$$

Но тогда, проделывая на интервале $(t_\varepsilon,t_\varepsilon+T)$ те же самые выкладки, что и при выводе (15), получаем

$$t\in\max_{(t_\varepsilon,t_\varepsilon+T)}\int_0^1\left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}(x,t)\right|^2dx \le M_1. \qquad (16)$$

Оценки (15),(16) позволяют перейти к пределу в соответствующем интегральном тождестве для $u_\varepsilon(x,t)$ и получить ограниченное обобщенное решение $u(x,t)$ задачи (11)–(12) класса $W_2^{1,1}(\Omega_1)$. Более того, из результатов [4] и оценок (15)–(16) вытекает, что и $u\in H^{\beta,\beta/2}(\overline{\Omega}_\infty)$ с некоторым $\beta>0$.

Доказательство единственности обобщенного решения проводится по схеме [2] и не вызывает особых затруднений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ентов В.М., Зазовский А.Ф.* Гидродинамика процессов повышения нефтеотдачи. М.: Недра, 1989. 232 с.

2. *Мейрманов А.М.* Задача Стефана. Новосибирск: Наука, 1986. 237 с.

3. *Артемова Г.Н., Хуснутдинова Н.В.* Об асимптотике решений двумерного уравнения типа нестационарной фильтрации // Динамика сплошной среды. 1969. Вып. 2. С. 91-99.

4. *Антонцев С.Н., Монахов В.Н.* О некоторых задачах фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости // Динамика сплошной среды. 1969. Вып. 2. С. 156-167.

Резюме

Жұмыс екі өлшемді құбыр аймағындағы сұйықтар қозғалысының математикалық моделін зерттеуге арналған. Математикалық модель біртұтас орта механикасының заңдарына сүйеніп құрастырылған. Уақыт шексіз өскендегі шешімнің асимптотикалық жағдайы және уақыт бойынша периодтылығы зерттелген. Алынған нәтижелер тиімді есептеу алгоритмдерін құруға мүмкіндік жасайды.

Summary

The work is devoted to defining ranges of distribution of a chisel solution in a chink to a zone of a layer with the help of mathematical model. The mathematical model is made on the basis of the laws of preservation of weight. It is investigated behaviour of the decision at unlimited increase of time. The received results can be applied at drawing up of effective computing algorithms.

Актауский государственный университет им. Ш. Есенова, г. Актау

Поступила 25.09.06г.