Б.Ш. КУЛПЕШОВ

(Международный университет информационных технологий, Алматы, Казахстан)

КРИТЕРИЙ СВЯЗНОСТИ
В ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫХ СТРУКТУРАХ

Аннотация

В настоящей работе исследуются частично упорядоченные структуры с условием слабой о-минимальности. Получен критерий связности множества реализаций каждого полного 1-типа над основным множеством в частично упорядоченных структурах конечной ширины.

Ключевые слова: упорядоченные структуры, критерий связности, множество, о-минимальность.

Кілт сөздер: реттелген құрылымдар, қисындылық критерийі, жиынын, о-минималдығы.

Keywords: ordered structures, the criterion of connectivity, the set of o-minimality.

Понятие о-минимальности возникло более двадцати лет назад [1] и доказало свою полезность и важность. С тех пор появились многочисленные обобщения о-минимальности, отметим только некоторые из них: слабая о-минимальность [2], [3], квази-о-минимальность [4], [5], циклическая минимальность [6], слабая циклическая минимальность [7], о-стабильность [8], [9]. Первые два понятия относятся к линейно упорядоченным структурам, а следующие два понятия – к циклически упорядоченным структурам, и основная идея этих обобщений состоит в том, что определимые множества соответствующих моделей предполагаются представимыми в виде булевой комбинации достаточно простых множеств. Понятие о-стабильности (или упорядоченной стабильности) является обобщением о-минимальности несколько в другом русле, а именно в том, что любое сечение имеет малое число расширений до полных 1-типов. Вспомним, что любое сечение в о-минимальной структуре расширяется единственным образом до полного 1-типа [1], а в слабо о-минимальной структуре имеет самое большее два расширения [10].

Естественно попытаться обобщить понятие о-минимальности на частично упорядоченные структуры, что и было сделано первоначально в работе [11]. Структура вида $\langle M, =, <, \ldots\rangle$, где $\langle M, <\rangle$ – частично упорядоченное множество, называется *частично* *упорядоченной структурой*. В каждой частично упорядоченной структуре, не являющейся линейно упорядоченной, появляется отношение несравнимости элементов ◊, т.е.

$$x \lozenge y := \neg(x = y) \wedge \neg(x < y) \wedge \neg(x > y).$$

Любое семейство попарно несравнимых элементов частично упорядоченной структуры называется *антицепью*. Множество $A \subseteq M$ называется *выпуклым*, если для любых $a, b \in A$ и $c \in M$ условие $a < c < b$ влечет $c \in A$. Выпуклыми являются, в частности, точки и интервалы, определяемые обычным образом:

$$(a, b) = \{x \in M: a < x < b\},$$

$(a, b]$, $[a, b]$, (a, ∞), $(-\infty, b]$, где $a, b \in M$. Очевидно, что антицепи также являются выпуклыми множествами.

Слабо частично о-минимальной (или *слабо р.о-минимальной*) структурой называется частично упорядоченная структура $M = \langle M, =, <, \ldots\rangle$ такая, что любое определимое (с параметрами) подмножество структуры M является объединением конечного числа выпуклых множеств в M. Теорию T назовем *слабо частично о-минимальной*, если такова каждая ее модель.

В настоящей статье мы обсуждаем некоторые свойства слабо частично о-минимальных структур как находящиеся в контрасте со слабо о-минимальными структурами, так и совпадающие с ними. Например, мы можем построить слабо частично о-минимальную структуру, в которой имеется сечение, расширяющееся до любого конечного или бесконечного числа полных 1-типов, или слабо частично о-минимальную структуру, в которой алгебраическое замыкание подмножества структуры не совпадает с его определимым замыканием, и т.д.

Факт 1. Пусть $M = \langle M, \Sigma\rangle$ – слабо частично о-минимальная структура. Тогда любая параметрически определимая линейно упорядоченная подструктура $M' = \langle M', \Sigma\rangle$ структуры M является слабо о-минимальной структурой.

Множество $A \subseteq M$, где M – частично упорядоченная структура, назовем *связным*, если A выпукло и для любых элементов $a, b \in A$ $\neg(a \lozenge b)$. Ранее в слабо о-минимальном случае [10] было показано, что множество реализаций любого полного 1-типа над множеством является выпуклым (которое является связным в частично упорядоченной постановке). В слабо частично о-минимальном случае это свойство не выполняется.

Пример 2. Пусть $M = \langle M, =, <\rangle$ – частично упорядоченная структура, где $M = D_1 \cup D_2 \cup A$, D_i есть копия $\omega^* + \omega + Q + \omega^* + \omega$ для каждого $1 \le i \le 2$, A есть копия Q, $D_1 \lozenge D_2$, $A < D_i$ для каждого $1 \le i \le 2$.

Можно доказать, что структура M является слабо частично о-минимальной. Очевидно, что она имеет ширину 2. Рассмотрим следующие формулы:

$$\psi(x) := \forall z_1 \forall z_2 (z_1 < x < z_2 \rightarrow \exists t_1 \exists t_2 (z_1 < t_1 < x < t_2 < z_2))$$
$$\phi(x) := \exists y (y < x \wedge \psi(y))$$

Пусть $p(x) := \{x > a \mid a \in A\} \cup \{\psi(x)\} \cup \{\phi(x)\}$. Очевидно, что p определяет тип над A, т.е. $p \in S_1(A)$. Нетрудно понять, что $p(M)$ является объединением двух связных множеств.

Пример 3. Пусть $M = \langle M, =, < \rangle$ – частично упорядоченная структура, где $M = \bigcup_{i<\omega} D_i \cup A$, D_i есть копия $\omega^* + \omega + Q + \omega^* + \omega$ для каждого $i < \omega$, A есть копия Q, $D_i \lozenge D_j$ для любых i, j: $i \neq j$, $A < D_i$ для каждого $i < \omega$.

Можно доказать, что структура M является слабо частично о-минимальной. Очевидно, что она имеет бесконечную ширину. Рассматривая в качестве $\psi(x), \phi(x)$ и p те же самые формулы и тип как в примере 2, мы видим, что $p(M)$ является объединением бесконечного числа связных множеств.

Пусть $q(x) := \{x \lozenge c \mid c \in M\} \cup \{\psi(x)\} \cup \{\phi(x)\}$. Очевидно, что q определяет тип над M, т.е. $q \in S_1(M)$. Очевидно, что для каждого $n < \omega$ существует элементарное расширение N структуры M такое, что $q(N)$ является объединением n связных множеств; а также существует элементарное расширение структуры M, в котором множество реализаций типа q является объединением бесконечного числа связных множеств.

Теорема 4. Пусть M – частично упорядоченная структура конечной ширины. Тогда следующие условия эквивалентны:

(1) M слабо частично о-минимальна.

(2) Множество реализаций каждого полного 1-типа над M является связным в любом элементарном расширении структуры М.

Доказательство Теоремы 4. (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть M – слабо частично о-минимальна. Рассмотрим произвольную M-определимую формулу $\phi(x)$. В силу слабой частичной о-минимальности $\phi(M)$ есть объединение конечного числа выпуклых множеств, каждое из которых является определимым над M. Действительно, в силу того, что M имеет конечную ширину, существует M-определимая формула $\phi'(x)$ такая, что $\phi'(M) = \phi(M)$ и $\phi'(M)$ есть объединение конечного числа связных M-определимых множеств: $\phi'(x) \equiv \vee_{i=1}^{k} \phi_i'(x)$, $\phi_i'(M)$ связно для каждого $i \leq k$, $\phi_i'(M) \cap \phi_j'(M) = \varnothing$ для любых i, j: $i \neq j$.

Пусть p – произвольный 1-тип над M. Очевидно, что $\phi'(x) \in p \Leftrightarrow$ существует единственный номер $i \in \{1, \ldots, k\}$ такой, что $\phi_i'(x) \in p$. Также ясно, что $\phi_i'(x)$ – связная формула тогда и только тогда, когда

$$M \models \forall x \forall y [\phi_i'(x) \wedge \phi_i'(y) \rightarrow \neg(x \lozenge y) \wedge (x < y \rightarrow \forall t (x < t < y \rightarrow \phi_i'(t)))]$$

т.е. это свойство является элементарным и поэтому имеет место в любом элементарном расширении структуры M. Откуда имеем, что $p(N)$ связно в любом элементарном расширении N структуры M.

(2) $\Rightarrow$ (1). Допустим противное: M не слабо частично о-минимальна. Следовательно, существует M-определимая формула $\phi(x)$ такая, что $\phi(M)$ есть объединение бесконечного числа выпуклых множеств. Так как M имеет конечную ширину, то существует

бесконечное линейно упорядоченное множество $M' \subset M$ такое, что $\phi(M')$ есть объединение бесконечного числа выпуклых множеств. Тогда M' не является слабо о-минимальной структурой, противореча Теореме 3.1 [10].

В слабо о-минимальном случае алгебраическое замыкание любого подмножества структуры совпадает с его определимым замыканием. Однако в слабо частично о-минимальном случае это свойство также не выполняется.

Пример 5. Пусть $M = \langle M, =, < \rangle$ – частично упорядоченная структура, где M есть непересекающееся объединение Q_0, $\{a\}$, N_1 и N_2, Q_0 имеет тип Q, N_1 и N_2 имеют тип ω, причем $Q_0 < a < N_1$, $Q_0 < a < N_2$, $N_1 \lozenge N_2$.

Можно доказать, что структура M является слабо частично о-минимальной. Рассмотрим следующую формулу:

$$\phi(x) := \forall y[y < x \to \exists z(y < z < x)] \wedge \exists t[t > x \wedge \forall u(t \geq u \geq x \to u = t \vee u = x)]$$

Очевидно, что $M \models \phi(a) \wedge \exists!\, x\, \phi(x)$, т.е. $a \in dcl(\varnothing)$. Рассмотрим для каждого $n < \omega$ следующую формулу:

$$D_n(x,a) := x > a \wedge \exists x_1 ... \exists x_n (\wedge_{i=1}^{n}(x > x_i > a) \wedge \wedge_{i \neq j}(x_i \neq x_j) \wedge \forall y(x > y > a \to \vee_{i=1}^{n} y = x_i))$$

Очевидно, что для каждого $n < \omega$ существуют $b_1^n \in N_1, b_2^n \in N_2$ такие, что

$$M \models D_n(b_1^n, a) \wedge D_n(b_2^n, a),$$

т.е. $b_1^n, b_2^n \in acl(\varnothing)$. Очевидно, что не существует $\varnothing$-определимой формулы, различающей эти элементы, т.е. $b_1^n, b_2^n \notin dcl(\varnothing)$, откуда алгебраическое замыкание пустого множества не совпадает с его определимым замыканием.

Пример 6. Пусть $M = \langle M, =, <, f^1 \rangle$ – частично упорядоченная структура, где M есть непересекающееся объединение Q_1, Q_2 и Q_3, где Q_i имеет тип Q для каждого $1 \leq i \leq 3$, $Q_i \lozenge Q_j$ для любых $i \neq j$. Функция f – отображение $Q_1 \cup Q_2$ на Q_3, сохраняющее порядок, причем f биективно отображает Q_i на Q_3 для каждого $1 \leq i \leq 2$.

Также можно доказать, что структура M является слабо частично о-минимальной. Нетрудно понять, что $acl(\varnothing) = dcl(\varnothing)$, но для любого элемента $a \in Q_3$ $acl(a) \neq dcl(a)$.

ЛИТЕРАТУРА

1 A. Pillay and Ch. Steinhorn, Definable sets in ordered structures I, Transactions of the American Mathematical Society, 1986, volume 295, number 2, pp. 565-592.

2 M. Dickmann, Elimination of quantifiers for ordered valuation rings, Proceedings of the 3rd Easter Conference on Model Theory, Berlin: Humboldt University, 1985, pp. 64-88.

3 H.D. Macpherson, D. Marker and Ch. Steinhorn, Weakly o-minimal structures and real closed fields, Transactions of the American Mathematical Society, 2000, volume 352, number 12, pp. 5435-5483.

4 O. Belegradek, Ya. Petersil and F. Wagner, Quasi-o-minimal structures, The Journal of Symbolic Logic, 2000, volume 65, number 3, pp. 1115-1132.

5 O. Belegradek, V. Verbovskiy and F. Wagner, Coset-minimal groups, The Annals of Pure and Applied Logic, 2003, volume 121, number 2, pp. 113-143.

6 H.D. Macpherson and Ch. Steinhorn, On variants of o-minimality, The Annals of Pure and Applied Logic, 1996, volume 79, number 2, pp. 165-209.

7 B.Sh. Kulpeshov and H.D. Macpherson, Minimality conditions on circularly ordered structures, Mathematical Logic Quarterly, 2005, volume 51, issue 4, pp. 377-399.

8 Вербовский В.В., Упорядоченно стабильные группы, Математические труды, 2010, том 13, № 2, С. 84-127.

9 Байжанов Б.С., Вербовский В.В., Упорядоченно стабильные теории, Алгебра и Логика, том 50, № 3, С. 303-325.

10 B.Sh. Kulpeshov, Weakly o-minimal structures and some their properties, The Journal of Symbolic Logic, 1998, volume 63, number 4, pp. 1511-1528.

11 Кудайбергенов К.Ж., Обобщение o-минимальности на частичные порядки, Математические труды, 2012, том 15, номер 1, С. 86-108.

REFERENCES

1 A. Pillay and Ch. Steinhorn, Definable sets in ordered structures I, Transactions of the American Mathematical Society, 1986, volume 295, number 2, pp. 565-592.

2 M. Dickmann, Elimination of quantifiers for ordered valuation rings, Proceedings of the 3rd Easter Conference on Model Theory, Berlin: Humboldt University, 1985, pp. 64-88.

3 H.D. Macpherson, D. Marker and Ch. Steinhorn, Weakly o-minimal structures and real closed fields, Transactions of the American Mathematical Society, 2000, volume 352, number 12, pp. 5435-5483.

4 O. Belegradek, Ya. Petersil and F. Wagner, Quasi-o-minimal structures, The Journal of Symbolic Logic, 2000, volume 65, number 3, pp. 1115-1132.

5 O. Belegradek, V. Verbovskiy and F. Wagner, Coset-minimal groups, The Annals of Pure and Applied Logic, 2003, volume 121, number 2, pp. 113-143.

6 H.D. Macpherson and Ch. Steinhorn, On variants of o-minimality, The Annals of Pure and Applied Logic, 1996, volume 79, number 2, pp. 165-209.

7 B.Sh. Kulpeshov and H.D. Macpherson, Minimality conditions on circularly ordered structures, Mathematical Logic Quarterly, 2005, volume 51, issue 4, pp. 377-399.

8 Verbovskiy V.V., Ranked stable groups, Math Works, 2010, Volume 13, № 2, pp. 84-127.

9 Bayzhanov B.S., Verbovskiy V.V., Ranked stable theories, Algebra and Logic, Volume 50, № 3, pp. 303-325.

10 B.Sh. Kulpeshov, Weakly o-minimal structures and some their properties, The Journal of Symbolic Logic, 1998, volume 63, number 4, pp. 1511-1528.

11 Kudaibergenov K.Zh., Synthesis of o-minimality for partial orders, Math Works, 2012, Volume 15, Number 1, pp. 86-108

Резюме

Б.Ш. Күлпешов

(Халықаралық ақпараттық технологиялар университеті, Алматы, Қазақстан)

ЖАРТЫЛАЙ РЕТТЕЛГЕН ҚҰРЫЛЫМДАРЫНДАҒЫ ҚИСЫНДЫЛЫҚ КРИТЕРИЙІ

Босаң о-минималдық шарты бар жартылай реттелген құрылымдар зерттелген. Шекті ені жартылай реттелген құрылымдарында негізгі жиынмен анықталатын кез келген толық 1-түрдің орындалуы жиынның қисындылық критерийі табылды.

Кілт сөздер: реттелген құрылымдар, қисындылық критерийі, жиынын, о-минималдығы.

Summary

B.Sh.Kulpeshov

(International university of information technologies, Almaty, Kazakhstan)

CRITERION FOR CONNECTIVITY IN PARTIALLY ORDERED STRUCTURES

In the present work partially ordered structures with the condition of weak o-minimality are studied. A criterion for connectivity of the set of realizations of every complete 1-type over the universe in partially ordered structures of finite width has been obtained.

Keywords: ordered structures, the criterion of connectivity, the set of o-minimality.

Поступила 12.02.2013 г