

Б. КУМИСБЕКОВА, Б. Ш. МЫРЗАХМЕТОВА, Л. ТАШИМОВ

## ТЕРМОКАПИЛЛЯРНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПЛЕНОЧНОГО РЕЖИМА В ХИМИЧЕСКИХ АППАРАТАХ

Теоретически исследован вопрос возникновения нелинейных волновых структур на поверхности пленки при небольшой надкритичности системы с учетом фазового перехода. Установлено, что в процессах с фазовыми переходами наличие термокапиллярного эффекта приводит к изменению характеристик поверхностных волн по сравнению с теми, что могут наблюдаться в его отсутствие. Показано, что вследствие термо-капиллярной неустойчивости возможно нарушение монотонного нарастания толщины пленки и возникновение волновых течений.

Наиболее распространенным в реальных условиях гидродинамическим режимом течения жидкых пленок в химических явлется волновой. При развитии волновых структур на поверхности жидкой пленки важную роль играют нелинейные гидродинамические эффекты. Кроме того, возникают специфические нелинейные явления, связанные с зависимостью поверхностного напряжения от температуры и приводящие к конвективной неустойчивости межфазной границы пар-конденсат. Обычно возникновение волнового режима обусловливают критическими значениями чисел Рейнольдса. Однако эксперименты показывают, что в формировании и развитии волнового режима важную роль могут играть факторы нелинейной зависимости физико-химических характеристик сред от температуры и концентрации реагентов [1, 2]. При этом волновые режимы возникают уже при малых числах Рейнольдса [3].

В настоящей статье теоретически исследован вопрос возникновения нелинейных волновых структур на поверхности пленки при небольшой надкритичности системы с учетом фазового перехода (медленной конденсации).

Рассмотрим тонкую жидкую пленку конденсирующегося пара, стекающую по наклонной плоскости, расположенной под углом  $\gamma$  к горизонтали. Ось  $x$  направлена вдоль плоскости вниз по течению, ось  $y$ -перпендикулярно стенке. Свободная поверхность задается неизвестной заранее функцией  $h = h(x, t)$ . В выбранной таким образом системе координат движение жидкой пленки описывается следующей системой уравнений:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + v \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + g \sin \gamma, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + v \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + g \cos \gamma, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (3)$$

Над пленкой находится чистый пар при температуре насыщения  $T_s$ . Температура жидкости на свободной поверхности при строгом подходе к описанию процесса ниже температуры насыщения, т.е. на межфазной границе существует скачок температуры, обусловленный термическим сопротивлением на границе раздела фаз. Перенос тепла внутри пленки описывается уравнением конвективной теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right). \quad (4)$$

Условие баланса массы по конденсату выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u dy = \frac{\lambda}{\rho r} \frac{1}{\sqrt{1 + (\partial h / \partial x)^2}} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=h}. \quad (5)$$

При  $y = 0$  имеем

$$u = v = 0, \quad t = T_w. \quad (6)$$

На свободной поверхности  $y = h$  граничные условия с учетом зависимости поверхностного напряжения от температуры можно записать следующим образом:

$$P + 2\mu \frac{1 - (\partial h / \partial x)^2}{1 + (\partial h / \partial x)^2} \frac{\partial u}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial h / \partial x}{1 + (\partial h / \partial x)^2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\sigma_0 (1 - (\partial \sigma / \partial T) T)}{(1 + (\partial h / \partial x)^2)^{3/2}} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 0, \quad (7)$$

$$\mu \frac{1 - (\partial h / \partial x)^2}{1 + (\partial h / \partial x)^2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - 4\mu \frac{\partial h / \partial x}{1 + (\partial h / \partial x)^2} \frac{\partial u}{\partial x} = -\sigma_0 \frac{\partial \sigma / \partial T}{\sqrt{1 + (\partial h / \partial x)^2}} \left( \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} \right), \quad (8)$$

$$\frac{\lambda}{\sqrt{1 + (\partial h / \partial x)^2}} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \alpha(T_s - T_h). \quad (9)$$

Первые два условия отражают баланс на свободной поверхности нормальных и тангенциальных составляющих сил вязкости и сил, обусловленных поверхностным натяжением. Последнее условие представляет собой баланс тепла на границе пар-конденсат.

Для удобства дальнейшего анализа сформулированной задачи перейдем к следующим безразмерным параметрам и переменным:

$$t' = \frac{u_0}{l} t, \quad x' = \frac{x}{l}, \quad y' = \frac{y}{l}, \quad u' = \frac{u}{u_0}, \quad v' = \frac{v}{u_0},$$

$$P' = P \frac{\text{Re}}{\rho u_0^2}, \quad \varepsilon = \frac{h_0}{l}, \quad \text{Re} = \frac{u_0 h_0}{v}, \quad T' = \frac{T_s - T}{T_s - T_0},$$

$$\text{Pe} = \frac{u_0 h_0}{a}, \quad h' = \frac{h - h_0}{h_0}, \quad \theta = \frac{\lambda(T_s - T_0)}{\rho r u_0 h_0},$$

$$\text{Sh} = \frac{j}{\rho u_0}, \quad \text{Ma} = \frac{\sigma_0 (\partial \sigma / \partial T)(T_s - T_0)}{\mu u_0}, \quad \text{Bi} = \frac{\alpha h_0}{\lambda}.$$

Здесь  $l$  – характерная длина поверхностных волн,

$$h_0 = \left( \frac{3v j_0}{g \sin \gamma} \right)^{1/3}, \quad u_0 = \left( \frac{g \sin \gamma}{3v} \right)^{1/3} j_0^{2/3}, \quad \text{где } j_0 \text{ – рас-}$$

ход жидкости в пленке при стационарном безволновом режиме течения. Далее штрихи, используемые для обозначения безразмерных переменных, опускаем, поскольку это не будет вносить никакой путаницы. Рассмотрение задачи ведется в длинноволновом приближении, т.е. при условии  $l \gg h_0$ . Сохраняя в нашей задаче все члены, имеющие нулевой и первый порядок по  $\varepsilon$ , приходим к следующей системе уравнений и граничных условий:

$$\varepsilon \text{Re} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy \right) = -\varepsilon \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3, \quad (10)$$

$$\varepsilon \text{Re} \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 3 \operatorname{ctg} y, \quad (11)$$

$$\varepsilon \text{Pe} \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial T}{\partial y} \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy \right) = \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad (12)$$

$$\varepsilon \left( \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} \int_0^{1+h} u dy \right) = \theta \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=1+h}, \quad (13)$$

$$\varepsilon \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \text{Sh} = \theta \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=1+h}, \quad (14)$$

$$y = 0 \Rightarrow u = v = 0, \quad T = 1; \quad (15)$$

$$y = 1 + h \Rightarrow P + 2\varepsilon \frac{\partial u}{\partial x} + 2\varepsilon \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad (16)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial x} = \varepsilon \text{Ma} \left( \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial T}{\partial y} + \text{Bi} T. \quad (17)$$

Решение полученной задачи ищем методом интегральных соотношений, который широко применяется для описания волновой структуры на свободных поверхностях жидких пленок [4]. Мгновенное распределение продольной составляющей скорости по толщине пленки аппроксимируем автомодельным параболическим профилем:

$$u = \frac{3}{2} (1 + \Psi) \left[ 2 - \frac{y}{1+h} \right] \frac{y}{1+h}, \quad (18)$$

где вводится новая заранее неизвестная функция  $\Psi(x, t)$ , которая подлежит определению в процессе решения задачи. Аналогично для профиля температуры принято следующее автомодельное соотношение:

$$T = \frac{(1+M) \exp(Biy)}{\exp(Bi(1+h))} - \left( 1 - \frac{1+M}{\exp(Bi(1+h))} \right) \times$$

$$\times \left\{ 3 \frac{(1+h-y)^2}{(1+h)^2} - 4 \frac{(1+h-y)^3}{(1+h)^3} \right\}, \quad (19)$$

которое удовлетворяет граничным условиям при  $y = 0$  и  $y = 1+h$  и где  $M = M(x, t)$  – также заранее неизвестная функция, определяемая в процессе решения.

Интегрируя первое и третье уравнения полученной системы по  $y$  от 0 до  $1+h$ , с использованием граничных условий для определения

значений величин на твердой стенке и на свободной поверхности, приходим в пределе  $\text{Bi} \gg 1$  к следующей системе уравнений для определения  $h(x,t)$ ,  $\Psi(x,t)$ ,  $M(x,t)$ :

$$\begin{aligned} & \varepsilon \operatorname{Re} \left\{ (1+h) \frac{\partial}{\partial t} [(1+\Psi)(1+h)] + \right. \\ & + \frac{3}{5}(1+h) \frac{\partial}{\partial x} [(1+\Psi)^2(1+h)] - \\ & - \frac{3}{10}(1+\Psi)(1+h)^2 \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{9}{40}(1+\Psi)^2(1+h) \frac{\partial h}{\partial x} \Big\} = \\ & = \varepsilon M a (1+h) \left[ \frac{\partial M}{\partial x} + \text{Bi} (1+M) \frac{\partial h}{\partial x} \right] - \\ & - 3(1+\Psi) + 3(1+h)^2; \end{aligned} \quad (20)$$

$$\varepsilon \left\{ \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(1+\Psi)(1+h)] \right\} = \theta \text{Bi} (1+M); \quad (21)$$

$$\begin{aligned} & \varepsilon \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{\text{Bi}} (1+h) \frac{\partial M}{\partial t} + \frac{3}{2\text{Bi}} (1+\Psi)(1+h) \frac{\partial M}{\partial x} - \right. \\ & - \frac{3}{2}(1+\Psi)(1+h)(1+M) \frac{\partial h}{\partial x} - \\ & - (1+M)(1+h) \frac{\partial}{\partial x} [(1+h)(1+\Psi)] + \\ & + \frac{3}{2\text{Bi}} (1+h)(1+M) \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{1}{10}(1+h)^2 \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \\ & \left. - \frac{1}{10}(1+\Psi)(1+h) \frac{\partial h}{\partial x} \right\} = \text{Bi} (1+M)(1+h) + 6. \end{aligned} \quad (22)$$

Полагаем далее, что  $h(x,t) \ll 1$ ,  $\Psi(x,t) \ll 1$ ,  $M(x,t) \ll 1$ , а также считаем искомые функции почти гармоническими. Тогда можно искать решение полученной выше системы уравнений в виде рядов Фурье по кратным гармоникам:

$$h = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n \exp(in(\omega t - kx));$$

$$\Psi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Psi_n \exp(in(\omega t - kx)).$$

Здесь  $\omega$  – комплексная частота,  $k$  – волновое число.

Для слабонелинейных периодических волн можно принять, что амплитуда первой гармоники много больше амплитуд последующих гармоник.

Если ввести для величины амплитуды первой гармоники обозначение  $A^{\frac{1}{2}}$ , где  $A \ll 1$ , то для амплитуд второй и нулевой гармоник можно принять, что они имеют порядок  $A$ . Соответственно для более высоких гармоник с  $n > 1$  будут справедливы оценки  $H_n \sim \Psi_n \sim M_n \sim A^{\frac{n}{2}}$ . В дальнейших выкладках ограничимся только гармониками, имеющими порядок малости не выше  $A^{\frac{3}{2}}$ . Кроме того, будем рассматривать лишь физически наиболее интересный случай  $\text{Bi} \gg 1$  и  $\varepsilon \operatorname{Re} \ll 1$ . Тогда, подставляя разложения Фурье в наши уравнения и разделяя члены при различных гармониках, после ряда выкладок приходим к следующей системе уравнений для амплитуд:

– для нулевой гармоники

$$3\Psi_0 - 6H_0 - 6H_1 H_1^* + \varepsilon M a \text{Bi} H_1 M_1^* i k - \varepsilon M a \text{Bi} H_1^* M_1 i k = 0, \quad (23)$$

$$1 + M_0 = 0, \quad (24)$$

$$7 + M_0 + H_0 + M_1 H_1^* + M_1^* H_1 = 0; \quad (25)$$

– для первой гармоники

$$\begin{aligned} & 3\Psi_1 + (ik\varepsilon M a \text{Bi} - 3)H_1 + \varepsilon M a i k M_1 + \\ & + (ik\varepsilon M a \text{Bi} - 6)H_0 H_1 + (ik\varepsilon M a \text{Bi} - 6)H_1^* H_2 + \\ & + \varepsilon M a (1 + \text{Bi}) i k H_0 M_1 + \varepsilon M a (2 - \text{Bi}) i k M_2 H_1^* - \end{aligned}$$

$$- \varepsilon M a (1 - 2\text{Bi}) i k M_1^* H_2 + i k \varepsilon M a \text{Bi} M_1^* H_1^2 = 0, \quad (26)$$

$$M_1 + H_1 + M_0 H_1 + M_1^* H_2 + M_2 H_1^* = 0; \quad (27)$$

– для второй гармоники

$$\begin{aligned} & 3\Psi_2 + (2ik\varepsilon M a \text{Bi} - 3)H_2 + 2ik\varepsilon M a M_2 + \\ & + ik\varepsilon M a (1 + \text{Bi}) M_1 H_1 + (ik\varepsilon M a \text{Bi} - 3)H_1^2 = 0, \end{aligned} \quad (28)$$

$$2ik\Psi_2 + 2i(k - \omega)H_2 + \theta \text{Bi} M_2 + 2ik\Psi_1 H_1 = 0, \quad (29)$$

$$M_2 + H_2 + M_1 H_1 = 0. \quad (30)$$

Выражая величины  $\Psi_0$ ,  $H_0$ ,  $M_0$ , а также  $\Psi_2$ ,

$H_2$ ,  $M_2$  через соответствующие амплитуды первых гармоник, получаем после ряда преобразований следующее условие совместности:

$$i(\omega - 3k + Fk^3) - C\omega k + 6Dk^2 + (-3ik + (31))$$

$$+ \frac{2}{3} \frac{(6ik - 3Bk^4 - 7Rk^2)(2ik - Rk^2 + 19Bk^4)}{6i(\omega - 3k + 4Fk^3) - 2C\omega k + 3Dk^2} A = 0,$$

Остальные коэффициенты полученного соотношения определяются следующими выражениями:

$$F = \frac{6\epsilon Ma(Bi - 1)}{Bi\theta}, \quad C = \frac{3}{2} - \frac{\epsilon Ma(3Bi - 2)}{Bi\theta},$$

$$D = \epsilon MaBi.$$

Отметим, что условие совместности (31) является приближенным, поскольку основано на уравнениях для нулевой гармоники, для которых нельзя гарантировать выполнение условия малости амплитуд.

Представим комплексную частоту в виде  $\omega = \Omega - i\gamma^*$ , где  $\Omega$  – действительная частота, а  $\gamma^*$  – инкремент нарастания амплитуды колебаний. Условие совместности (32) позволяет определить  $\Omega$  и  $\gamma^*$  как функции безразмерного волнового числа  $k$  и квадрата амплитуды  $A$ .

Таким образом, приходим к соотношению следующего вида:

$$\gamma^* = \Gamma(k) + \Gamma_1(k)A, \quad (32)$$

где функции  $\Gamma(k)$  и  $\Gamma_1(k)$  получаются в явном виде. Уравнения, которым удовлетворяют эти функции, получаются из двух основных требований.

Первое заключается в том, что стационарному режиму отвечает равный нулю инкремент нарастания колебаний. Второе требование-требование максимальности инкремента, рассматриваемого как функция волнового числа  $k$  при фиксированной амплитуде  $A$ .

Отсюда имеем два уравнения, определяющие волновое число и амплитуду:

$$\Gamma(k) + \Gamma_1(k)A = 0, \quad (33)$$

$$\frac{d\Gamma(k)}{dk} + \frac{d\Gamma_1(k)}{dk} A = 0. \quad (34)$$

Из уравнения совместности следует, что повышение устойчивости системы происходит с ростом величины поверхностных сил, т.е. увеличением числа Марангони. В линейном приближении это описывается как стабилизация возмущений с малой длиной волны. С ростом амплитуды волн указанные эффекты также выступают как стабилизирующий фактор и могут способствовать возникновению стационарных поверхностных волн, так как с возрастанием числа Марангони и амплитуды возмущений величина

критического инкремента  $\gamma^*$  уменьшается и может стать отрицательной. Уравнение совместности (31) также позволяет установить, что с ростом числа Марангони фазовые скорости поверхностных волн убывают. Полученные результаты в качественном отношении сходны с эффектом влияния нерастворимых поверхностно-активных веществ на устойчивость жидкой пленки (без учета возрастания толщины пленки за счет конденсации). Установленная аналогия позволяет предположить, что с ростом градиента поверхностного натяжения на поверхности пленки конденсата могут реализовываться более длинные устойчивые волны. Таким образом, в процессах с фазовыми переходами наличие термокапиллярного эффекта приводит к изменению характеристик поверхностных волн по сравнению с теми, что могут наблюдаться в его отсутствие. Результаты проведенного анализа показывают, что влияние термо-капиллярной неустойчивости может оказаться весьма значительным. Более того, возможно нарушение монотонного нарастания толщины пленки, что может вести к неустойчивости безволнового течения и возникновению волновых течений. Ранее немонотонное изменение толщины пленки конденсата с продольной координатой, стимулированное вязкостными эффектами, было изучено в работе [5]. При этом экспериментально был подтвержден факт нестабильности такого течения. Проведенное в настоящей статье исследование показывает, что неустойчивость аналогичного типа может иметь место и под влиянием термокапиллярного эффекта.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ташимов Л.Т. Конвективный тепло- и массообмен в пленочных процессах химической технологии // Вопросы моделирования и устойчивости. Алматы: Білім, 1999. 201 с.
2. Рабинович Л.М. О влиянии растворимых поверхностно-активных веществ на устойчивость жидких пленок и струй // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1978. №6. С. 26.
3. Рабинович Л.М. Влияние массообмена и гетерогенной химической реакции на устойчивость жидкой пленки // Прикл. механика и техн. физика. 1979. №2. С. 91.
4. Brener A.M., Tashimov L. Wave regimes of the vapour film condensation // Moving Boundaries. 2001. VI. P. 51-60.
5. Бренер А.М., Найденов В.И., Альмендингер Г.Г., Бердалиева Г.А., Дильман В.В. Нестационарные режимы пленочной конденсации, обусловленные зависимостью вязкости конденсата от температуры // Теор. основы хим. технол. 1991. Т. 25, №3. С. 334.

**Резюме**

Жүйенің кіші жоғары қауіптілікті фазалық өтуді ескеріп перде беттеріндеңі сыйыкты емес толқынды құрылымдардың пайда болу сұраптары теориялық зерттелген. Фазалық өтудерді термокапиллярлы эффект бар болуындағы, оның болмаған жағдаймен салыстырғанда беттік толқындардың сипаттамаларының өзгеруі анықталған. Термокапиллярлы тұрақсыздық нәтижесінде перденің қалындығының бірқалыпты артуы және толқынды ағымдардың пайда болуы көрсетілген.

**Summary**

The paper deals with theoretical investigations of non-linear wave structures at the liquid film surface under the small sub-critic state of the system. It is established that in the processes accompanied by phase transitions the thermo-capillary effect leads to changing the surface wave characteristics as against regimes without this effect. It is shown that due to thermo-capillary instability a monotonous increasing of the film thickness can be destroyed.

МКТУ им. Х. А. Ясаяу,  
г. Туркестан

Поступила 20.06.08г.