УДК 510.678

А. М. КУНГОЖИН

АКСИОМАТИЗИРУЕМОСТЬ КЛАССА ПОЗИТИВНО ЭКЗИСТЕНЦИОНАЛЬНО ЗАМКНУТЫХ МОДЕЛЕЙ

Доказано, что подкласс позитивно экзистенционально замкнутых моделей любого конечно h-универсально аксиоматизируемого класса в предикатной сигнатуре является аксиоматизируемым. Показаны примеры, в которых при изменении условий теоремы подкласс позитивно экзистенционально замкнутых моделей становится неаксиоматизируемым: при добавлении в сигнатуру функций; при бесконечной аксиоматизируемости самого исходного класса. Показан также пример конечно h-универсально аксиоматизируемого класса подкласс позитивно-экзистенционально замкнутых моделей которого не конечно аксиоматизируем.

Ключевые слова: позитивная экзистенциональная замкнутость, аксиоматизация, h-универсальное предложение.

1. Введение. Мы используем понятия позитивной логики, введенные в работе Б. Пуаза и И. Бен Якова [1], [2]. Данная работа является продолжением работ автора [4], [5]. Приведем основные определения. Рассмотрим сигнатуру Σ с отношением равенства, при этом образуем обычные формулы первого порядка, используя операции отрицания, конъюнкции, дизъюнкции и квантор существования. *Позитивные экзистенциональные формулы* образуются без операции отрицания, в пренексной форме они могут быть записаны следующим образом: $(\exists\overline{y}) f(\overline{x},\overline{y})$, где $f(\overline{x},\overline{y})$ бескванторная позитивная формула.

Гомоморфизм Σ-структуры A в Σ-структуру B есть отображение h из основного множества A модели A в основное множество B модели B такое, что для любого кортежа $\overline{a}$ из A, если $\overline{a}$ удовлетворяет атомарной формуле $R(\overline{a})$, то ей также будет удовлетворять кортеж $h(\overline{a})$. При этом обратное не требуется, например, $h(\overline{a})$ может удовлетворять большему количеству атомарных формул по сравнению с кортежем $\overline{a}$, а также h может быть неинъективным отображением. Если существует гомоморфизм из модели A в модель B, то мы говорим, что B является *продолжением* A, и A есть *начало* B. (Термины расширение/сужение используются, когда h является вложением, то есть когда $\overline{a}$ и $h(\overline{a})$ удовлетворяют одним и тем же атомарным формулам).

При гомоморфизме h любая позитивная формула $(\exists\overline{y})f(\overline{x},\overline{y})$, удовлетворяющая кортежу $\overline{a}$, будет также удовлетворять и кортежу $h(\overline{a})$. Мы говорим, что h является *погружением*, если выполняется обратное: $\overline{a}$ и $h(\overline{a})$ удовлетворяют одним и тем же позитивным формулам. При этом модель A *позитивно экзистенционально-замкнута* в модели B. Погружение является вложением, но позитивная экзистенциональная замкнутость слабее робинсоновского понятия, поскольку рассматриваются только позитивные экзистенциональные формулы.

Пусть задан класс $\Im$ Σ-структур, мы говорим, что модель A класса $\Im$ *позитивно экзистенционально-замкнута* в классе $\Im$, если любой гомоморфизм из A в любую модель класса $\Im$ является погружением.

h-универсальное предложение, по определению, является отрицанием позитивного предложения, его можно записать следующим образом: $\neg(\exists\overline{y})f(\overline{y})$ или, что эквивалентно, $(\forall\overline{y})\neg f(\overline{y})$, где формула $f(\overline{y})$ бескванторная и позитивная.

2. Позитивные диаграммы.

Определение 1. Пусть нам задана модель A в предикатной сигнатуре Σ. Определим *позитивную диаграмму* этого кортежа $D(\overline{x})$ как произвольную конъюнкцию позитивных атомарных формул. Если кортеж $\overline{x}'$ состоит из элементов кортежа $\overline{x}$, то *поддиаграммой* $D'(\overline{x}')$ диаграммы $D(\overline{x})$ назовем ограничение диаграммы $D(\overline{x})$ на кортеж переменных $\overline{x}'$.

Замечание 1. В силу дистрибутивности конъюнкции и дизъюнкции, любая позитивная бескванторная формула эквивалентна дизъюнкции конечного числа попарно несравнимых позитивных диаграмм.

Лемма 1. Модель A является **pec**-моделью класса $\Im$ тогда и только тогда, когда при любом гомоморфизме $h: A \to B$, для любой позитивной диаграммы $D(\overline{x},\overline{y})$ и для любого кортежа $\overline{a} \in A$, если существует кортеж $\overline{b} \in B$, такой, что формула $D(h(\overline{a}),\overline{b})$ истинна в модели B, то следует существование кортежа $\overline{a}' \in A$ такого, что формула $D(\overline{a},\overline{a}')$ истинна в модели A.

Доказательство. Необходимость очевидна, так как любая позитивная диаграмма $D(\overline{x},\overline{y})$ является позитивной формулой. Докажем достаточность. Фиксируем гомоморфизм $h: A \to B$. Если формула $D(h(\overline{a}),\overline{b})$ истинна в модели B ($\overline{a} \in A$, $\overline{b} \in B$), то следует существование кортежа $\overline{a}' \in A$ такого, что формула $D(\overline{a},\overline{a}')$ истинна в модели A. Теперь докажем, что для любой позитивной бескванторной формулы φ из истинности формулы $\varphi(h(\overline{a}),\overline{b})$ в модели B ($\overline{a} \in A$, $\overline{b} \in B$) следует существование кортежа $\overline{a}' \in A$ такого, что формула $\varphi(\overline{a},\overline{a}')$ истинна в модели A. Как было замечено ранее, возможно представление формулы $\varphi(\overline{x},\overline{y}) \equiv D_1(\overline{x},\overline{y}) \vee D_2(\overline{x},\overline{y}) \vee ... \vee D_s(\overline{x},\overline{y})$. Из истинности формулы $\varphi(h(\overline{a}),\overline{b})$ в модели B следует выполнение одного из дизъюнктивных членов $D_i(h(\overline{a}),\overline{b})$ в модели B. Тогда, по предположению, существует кортеж $\overline{a}' \in A$, для которого формула $D_i(\overline{a},\overline{a}')$ истинна в модели A. Поэтому и сама формула $\varphi(\overline{a},\overline{a}')$ будет истинна в модели A.

Лемма 2. Пусть h-универсальное предложение $p = (\forall\overline{y})\neg f(\overline{y})$, аксиоматизирующее теорию T, зависит от кортежа переменных длины n. Тогда произвольная диаграмма $D(\overline{x})$, в которой длина кортежа переменных превосходит n, выполнима в теории T тогда и только тогда, когда в теории T выполнима любая ее поддиаграмма $D'(\overline{x}')$ от n переменных.

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Пусть $\overline{x} = <x_1, x_2,\ldots, x_k>$. На множестве $\{a_1, a_2,\ldots, a_k\}$ построим модель. Определим в этой модели атомарные отношения в соответствии с диаграммой $D(\overline{x})$: $R(\overline{a}')$ истинно в образуемой модели, если и только если отношение $R(\overline{x}')$ входит в $D(\overline{x})$. Так как любая поддиаграмма от n переменных выполнима в p, то на любом n-элементном подкортеже $\overline{a}$ не выполняется ни один из дизъюнктивных членов p. То есть в полученной модели выполняется p.

Определение 2. Две выполнимые в конечно h-универсально аксиоматизируемой теории T позитивные диаграммы $D_1(\bar{x},\bar{y})$ и $D_2(\bar{x},\bar{z})$, ограничения которых на кортеж $\bar{x}$ совпадают, назовем *несовместными*, если их конъюнкция не выполнима в теории T.

В конъюнкции произвольных двух несовместных диаграмм, согласно Лемме 2, можно выделить позитивную поддиаграмму $D'(\bar{x}',\bar{y}',\bar{z}')$ от n переменных, которая будет невыполнимой в теории T. Тогда сужение $D_2'(\bar{x},\bar{z}')$ диаграммы $D_2(\bar{x},\bar{z})$ на кортеж переменных $\bar{x}\bar{z}'$ также будет несовместно с диаграммой $D_1(\bar{x},\bar{y})$. Заметим, что при фиксированной диаграмме $D_1(\bar{x},\bar{y})$ соответствующих не совместных с нею различных диаграмм $D_2'(\bar{x},\bar{z}')$, в которых длина кортежа $\bar{z}'$ не превосходит n, найдется только конечное число. Выделим это множество $\{D_i'(\bar{x},\bar{z}') : i \in I_{D_1(\bar{x},\bar{y})}\}$.

3. Аксиоматизируемость подкласса позитивно экзистенционально замкнутых моделей h-универсального класса.

Теорема. Если класс $\Im$ в предикатной сигнатуре является конечно h-универсально аксиоматизируемым, то подкласс всех его позитивно экзистенционально замкнутых моделей является аксиоматизируемым.

Доказательство. Так как класс $\Im$ является конечно h-универсально аксиоматизируемым, то можем считать, что он аксиоматизируем одним h-универсальным предложением p с n кванторами. Теорией T_{pec} считаем следующий бесконечный набор аксиом по всевозможным позитивным диаграммам $D(\bar{x},\bar{y})$, не ограничивая длину кортежей переменных $\bar{x}$ и $\bar{y}$:

$$(\forall\bar{x})[(\exists\bar{y})D(\bar{x},\bar{y}) \vee (\exists\bar{u}_1)D_1(\bar{x},\bar{u}_1) \vee$$
$$\vee (\exists\bar{u}_2)D_2(\bar{x},\bar{u}_2) \vee \ldots \vee (\exists\bar{u}_m)D_m(\bar{x},\bar{u}_m)],$$

где набор D_i $(1 \le i \le m)$ является исчерпывающим набором диаграмм, несовместных с диаграммой $D(\bar{x},\bar{y})$, при котором длина кортежей $\bar{u}_i'$ ограничивается числом n. Покажем, что теория T_{pec} вместе с h-универсальным предложением p аксиоматизирует класс позитивно экзистенционально замкнутых моделей класса $\Im$.

Пусть модель A является pec-моделью класса $\Im$. Докажем, что в ней выполняется любая аксиома из T_{pec}. Фиксируем одну из них $(\forall\bar{x})[(\exists\bar{y})D(\bar{x},\bar{y}) \vee (\exists\bar{u}_1)D_1(\bar{x},\bar{u}_1) \vee (\exists\bar{u}_2)D_2(\bar{x},\bar{u}_2) \vee \vee \ldots \vee (\exists\bar{u}_m)D_m(\bar{x},\bar{u}_m)]$. Пусть для произвольного кортежа $\bar{a}$ не существует кортежа $\bar{b}$ такого, что формула $D(\bar{a},\bar{b})$ истинна в модели A, и при этом не выполняются все несовместные с ней диаграммы $\{D_i'(\bar{a},\bar{z}') : i \in I_{D(\bar{x},\bar{y})}\}$. Так как для диаграммы $D(\bar{a},\bar{y})$ нет препятствий в виде несовместных с ней диаграмм, то возможно построить продолжение с новыми элементами, в котором данная диаграмма может быть реализована. Это противоречит Лемме 1.

Теперь покажем, что любая модель из данного класса, в которой выполняются все аксиомы из T_{pec}, является pec-моделью. Чтобы воспользоваться Леммой 1 покажем, что для каждого гомоморфизма $h : A \to B$, для любой позитивной диаграммы $D(\bar{x},\bar{y})$ и для любого кортежа $\bar{a} \in A$, если для некоторого кортежа $\bar{b} \in B$ формула $D(h(\bar{a}),\bar{b})$ истинна в модели B, то существует кортеж $\bar{a}' \in A$ такой, что формула $D(\bar{a},\bar{a}')$ истинна в модели A. От противного, пусть диаграмма $D(\bar{a},\bar{y})$ не выполнима в модели A, хотя диаграмма $D(h(\bar{a}),\bar{y})$ выполнима в модели B. Тогда, в силу истинности соответствующей аксиомы, в модели A существует кортеж (обозначим его через $\bar{c}'$) такой, что в A выполняется формула $D_i(\bar{a},\bar{c}')$. Так как модель B является продолжением модели A, то в модели B формула $D_i(h(\bar{a}),h(\bar{c}'))$ также истинна. То есть диаграммы $D(\bar{x},\bar{y})$ и $D_i(\bar{x},\bar{z}')$ одновременно выполняются в модели B. Но по определению они несовместны. Теорема доказана.

4. Контрпримеры.

Пример 1. Язык состоит из одной унарной функции $y = f(x)$. h-универсальная теория состоит только из одной аксиомы нерефлексивности $\neg(\exists x)\, x = f(x)$. Существует единственная pec-модель, элементы которой разбиваются на циклы длины p, для любого простого числа p. Это дает нам пример конечно-аксиоматизируемой h-универсальной теории в конечной функциональной сигнатуре, чей класс pec-моделей не элементарен.

Пример 2. Язык состоит из одного бинарного предикатного символа S. h-универсальная теория состоит только из одной аксиомы несимметричности $\neg(\exists xy)\, S(x, y) \wedge S(y, x)$. Согласно доказанной теореме, класс рес-моделей данной теории элементарный, а именно, образуют бесконечные полные ориентированные генерические графы. (*Генерические графы* – это такие графы, в которых для любых двух конечных наборов различных элементов существует элемент, который одновременно является последователем для всех элементов первого набора и предшественником для всех элементов второго набора). Несложно доказать, что класс рес-моделей данной теории ω-категоричен и не конечно аксиоматизируем. Это дает нам пример конечно-аксиоматизируемой h-универсальной теории в конечной предикатной сигнатуре, чей класс рес-моделей не конечно аксиоматизируем.

Пример 3. Язык состоит из одного бинарного предикатного символа S. Пусть *путь* – это последовательность элементов $x_0, x_1, \dots x_n$ таких, что для всех $i \le n$ выполняется $S(x_i, x_{i+1})$ или $S(x_{i+1}, x_i)$. *Дистанция* d вдоль пути определяется следующим образом: $d(x_0, x_0) = 0$; $d(x_0, x_{i+1}) = d(x_0, x_i) + 1$, если выполняется $S(x_i, x_{i+1})$; $d(x_0, x_{i+1}) = d(x_0, x_i) - 1$, если выполняется $S(x_{i+1}, x_i)$. Пусть бесконечный набор h-универсальных аксиом теории Tu утверждает о том, что не существует двух элементов x и y, между которыми дистанция $d(x, y)$ определяется неоднозначно. В данной теории существует единственная рес-модель, которая изоморфна последовательности целых чисел. Поэтому класс рес-моделей теории Tu не элементарен. Это дает нам пример бесконечно-аксиоматизируемой h-универсальной теории в конечной предикатной сигнатуре, чей класс рес-моделей не является элементарным.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Poizat B.*, Universe positifs // The Journal of Symbolic Logic. 2006. V. 71, Issue 3. P. 969-976.

2. *Ben Yaacov I., Poizat B.*, Fondaments de la Logique Positive // The Journal of Symbolic Logic. 2007. V. 82. P. 1141-1162.

3. *Ben Yaacov I.*, Positive model theory and compact abstract theories // The Journal of Mathematical Logic. 2003. V. 3. P. 85-118.

4. *Кунгожин А.М.* Два свойства позитивно экзистенциально-замкнутых моделей // Изв. НАН РК. Сер. физ.-мат. 2010. № 5(273). С. 18-20.

5. *Кунгожин А.М.* О подклассе h-максимальных моделей h-универсального класса // Изв. НАН РК. Сер. физ.-мат. 2010. № 6(274). С. 55-57.

Резюме

Кез келген предикатты сигнатурада ақырлы h-универсалды аксиомаланған модельдер класының позитивті экзистенционалды-тұйық модельдер ішкі класы аксиомалатыны дәлелденген. Егерде теореманың шарттары келесі жолдарымен өзгерсе, атап айтқанда: сигнатураға функционалды символдары қосылса; алғашқы клас ақырсыз аксиомаланса, онда позитивті экзистенционалды-тұйық модельдер ішкі класы аксиомаланбайтындай мысалдар көрсетілді. Позитивті экзистенционалды-тұйық модельдер ішкі класы ақырлы аксиомаланбайтындай ақырлы h-универсалды аксиомаланған модельдер класының мысалы келтірілді.

Негізгі сөздер: позитивті экзистенционалды тұйық, аксиомалану, h-универсалды сөйлем.

Summary

It was proved that in any relational signature the subclass of positive existentially closed models of any finitely h-universally axiomatizable class is axiomatizable. The several examples show that all the conditions in the theorem are essential. In particular, the changing of the conditions leads to nonaxiomatizability of a subclass of positively existentially closed models: adding functions to the signature; infinite axiomatizability of the original class. Also it had been shown an example of the finitely h-universally axiomatizable class in which a subclass of positive-existentially closed models is not finitely axiomatizable.

Key words: positively existentially closeness, axiomatization, h-universal sentence.

КазНУ им. аль-Фараби,
г. Алматы

Поступила 8.03.2011г.