УДК 531.36:534.1

А. Л. КУНИЦЫН, А. Т. ТУРЕШБАЕВ

О ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЯХ МИКРОМЕТЕОРИТНЫХ ЧАСТИЦ В ГРАВИТАЦИОННО-РЕПУЛЬСИВНОМ ПОЛЕ БИНАРНЫХ ЗВЕЗДНЫХ СИСТЕМ

Рассматриваются положения относительного равновесия (компланарные точки либрации) микрометеоритных частиц в межзвездной среде бинарных звездных систем. В конфигурационном пространстве указывается геометрическое место устойчивых точек(для конкретной звездной пары),заполненных множеством частиц различной парусности. Показано, что при достаточно малых значениях эксцентриситета орбиты в окрестности каждой устойчивой точки существуют 2π-периодические движения.

1. В работах [1-4] отмечалось, что исследование движения микрометеоритных частиц или частиц газопылевых облаков в гравитационно-репульсивном поле бинарных звездных систем может быть с успехом проведено на основе некоторого модифицированного варианта ограниченной задачи трех тел, заключающегося в дополнительном учете сил светового давления, действующих на частицу со стороны звезд. Такая механическая система (называемая фотогравитационной задачей трех тел [1, 2]) с высокой степенью точности может считаться изолированной (в отличие от всех других известных приложений задачи трех тел), так как возмущающее действие других звездных систем ничтожно мало вследствие их чрезвычайно большой удаленности. С другой стороны, считается, что такие бинарные системы составляют около половины всех известных звездных систем.

Поскольку как гравитационная, так и репульсивная сила имеют одинаковую функциональную структуру (обе обратно пропорциональны квадрату расстояния от источника их воздействия), то их можно заменить одной силой, отличающейся от гравитационной некоторым постоянным коэффициентом *(Q)*, представляющим отношение разности этих сил к гравитационной силе и называемым коэффициентом редукции массы источника, создающего гравитационно-репульсивное поле. Все физически допустимые значения коэффициента редукции подчинены неравенству $-\infty < Q \le 1$ (при $Q=1$ световое давление отсутствует, при $0 < Q < 1$ оно ослабляет гравитацию, а при $Q < 0$ превосходит ее). Для него также можно получить следующее выражение [2, 3]

$$Q = [1 - C\sigma/(f M)],\ \sigma = \varepsilon\, s/m.$$

Здесь C – мощность излучения тела массой M, f - всемирная гравитационная постоянная, m и s - масса и площадь характерного сечения частицы, ε - коэффициент отражения. Таким образом, действующая на частицу сила зависит не только от характеристик силового поля, но и от параметров самой частицы в виде ее «парусности» σ, что, как увидим ниже, принципиально меняет (по сравнению с классической ограниченной задачей трех тел) характер положений относительного равновесия частиц во вращающейся вместе со звездами системе координат. В эллиптическом варианте задачи (когда орбиты звездной пары эллиптические) уравнения движения частицы во вращающейся вместе со звездами прямоугольной системе координат с началом в барицентре системы и осями Ox и Oy, расположенными в орбитальной плоскости звездной пары, имеют вид [2] (точка означает производную по истинной аномалии v орбитального движения звездной пары, выполняющую роль времени)

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \frac{\partial W}{\partial x},\quad \ddot{y} + 2\dot{x} = \frac{\partial W}{\partial y},\quad \ddot{z} = \frac{\partial W}{\partial z},\ (1.1)$$

где x,y,z – безразмерные, отнесенные к расстоянию $r = p/(1+e\cos v)^{-1}$ между звездами (p и e – фокальный параметр и эксцентриситет относительного орбитального движения звездной пары) прямоугольные координаты частицы (координаты Нехвила), а W – силовая функция системы, равная

$$W = (1+e\cos v)^{-1}[(x^2+y^2 - z^2 e\cos v)/2 + Q_1(1-\mu)/R_1 + Q_2\,\mu/R_2,$$

$$R_1 = [(x+\mu)^2 + y^2 + z^2]^{1/2},\ R_2 = [(x-1+\mu)^2 + y^2 + z^2]^{1/2}. \quad (1.2)$$

Здесь μ и $1-\mu$ - безразмерные массы звезд, отнесенные к их общей массе, а Q_1 и Q_2 - указанные выше коэффициенты редукции их массы.

Поскольку в каждый коэффициент редукции входит одна и та же парусность частицы σ, то для каждой фиксированной звездной пары эти коэффициенты оказываются связанными соотношением

$$\frac{1-Q_1}{1-Q_2} = k,\qquad k = \frac{C_1/M_1}{C_2/M_2}\qquad (1.3)$$

представляющим на плоскости Q_1, Q_2 пучок прямых, проходящих через точку $Q_1 = Q_2 = 1$.

Коэффициент k, выделяющий одну из прямых этого пучка, и массовый параметр μ полностью характеризуют гравитационно-репульсивное поле выбранной звездной пары. Разным точкам одной из прямых (1.3) соответствуют частицы с различной парусностью σ, растущей по мере удаления от точки $Q_1 = Q_2 = 1$, что, как легко видеть, происходит с уменьшением абсолютных размеров частицы.

Как и в классической задаче, наибольший интерес здесь представляет исследование положений относительного равновесия частицы (аналогичные известным точкам либрации классической задачи). При этом было показано [4,5], что в отличие от классической задачи в круговом варианте ($e=0$) рассматриваемой задачи существуют положения относительного равновесия частицы не только в плоскости орбитального движения звезд, но и в плоскости xoz, перпендикулярной ей, и называемые компланарными точками либрации [6, 8]. Их координаты x^* и z^* ($y^*=0$) находятся из решения системы уравнений

$$\partial W/\partial y = 0,\quad \partial W/\partial z = 0,$$

которая, будучи нелинейной и аналитически неразрешимой относительно этих координат, является линейной относительно коэффициентов редукции Q_1, Q_2, в результате чего легко устанавливается их связь с координатами посредством формул

$$Q_1 = \frac{x^* R_1^3}{1-\mu},\qquad Q_2 = \frac{-x^* R_2^3}{\mu}\qquad (1.4)$$

Отсюда, в частности, видно, что такие положения равновесия возможны, только когда одна из звезд еще притягивает частицу, а другая отталкивает ее.

Поскольку коэффициенты редукции зависят как от параметров гравитационно-репульсивного поля k и μ, так и от параметров самой частицы в виде ее парусности σ, то из (1.4) также вытекает, что для всякой фиксированной звездной пары указанные точки либрации образуют (как и в плоском случае) однопараметрическое семейство положений относительного равновесия, заполненное множеством частиц с различной парусностью σ. Форму такого облачного скопления частиц непосредственно в конфигурационном пространстве можно получить, подставляя выражения (1.4) в соотношение (1.3) при фиксированных значениях параметров k и μ для заданной звездной пары [8].

В эллиптическом варианте задачи ($e\neq0$) таких положений равновесия не существует, но при достаточно малых значениях эксцентриситета в малой окрестности указанных положений равновесия могут возникать 2π-периодические движения. Покажем это.

2. Будем рассматривать периодические движения частиц в окрестности тех положений относительного равновесия при $e=0$, для которых выполняются необходимые условия устойчивости, т.е. условия, получаемые из рассмотрения уравнений возмущенного движения в первом приближении. Вводя возмущения $x_1 = x - x^*$, $x_2 = y - y^*$, $x_3 = z - z^*$ и учитывая , что силовая функция (1.2) является аналитической функцией e в окрестности точки $e=0$, а также аналитической функцией введенных возмущений, уравнения возмущенного движения можно записать в виде

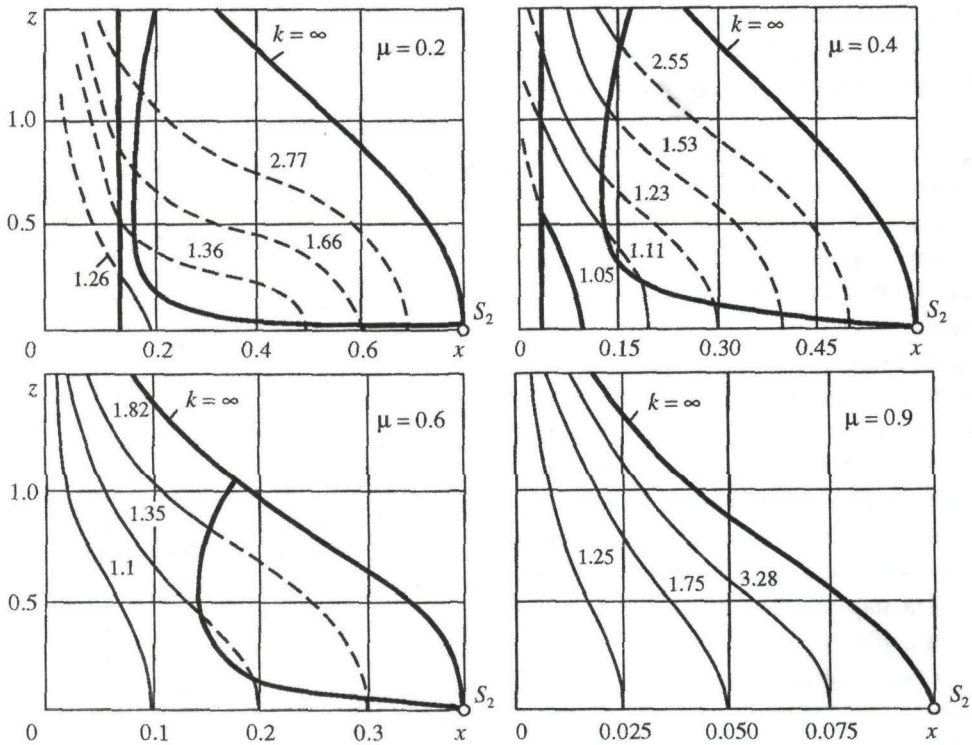
$$\ddot{x}_1 - 2\dot{x}_2 + c_{xx}x_1 + c_{xz}x_3 =$$
$$= X_1 + e[(\frac{\partial W_x}{\partial e})_0 + e(\frac{\partial^2 W_x}{\partial e^2})_0 + \ldots], \quad (2.1)$$

$$\ddot{x}_2 + 2\dot{x}_1 + c_{yy}x_2 = X_2 + e[(\frac{\partial W_y}{\partial e})_0 + e(\frac{\partial^2 W_y}{\partial e^2})_0 + \ldots],$$

$$\ddot{x}_3 + c_{zx}x_1 + c_{zz}x_3 = X_3 + e[(\frac{\partial W_z}{\partial e})_0 + (\frac{\partial^2 W_z}{\partial e^2})_0 + \ldots],$$

где X_1, X_2, X_3 представляют совокупность нелинейных членов разложения функции W по возмущениям, взятых при $e=0$; W_x, W_y, W_z - частные производные от функции $W(x^* + x_1, y^* + x_2, z^* + x_3)$ соответственно по x, y, z, являющиеся 2π-периодическими функциями истинной аномалии v, выполняющей роль времени. Индекс ноль в выражениях для частных производных от W означает, что в них также надо положить $e=0$.

Систему (2.1) при e=0 будем считать порождающей. Она обладает тривиальным решением, соответствующим рассматриваемым компланарным точкам либрации круговой задачи. Кроме того, эта система обладает аналитическим интегралом, поскольку исходная система уравнений (1.1) при $e=0$ является обобщенно-консервативной. Как известно, выполнение необходимых условий устойчивости тривиального решения таких систем означает, что корни соответствующего характеристического уравнения линеаризованной системы (в рассматриваемом случае являющегося бикубическим [5, 6, 8]) не должны иметь вещественных частей, т.е. быть либо чисто мнимыми, либо нулевыми. При этом последний случай реализуется на границах области устойчивости и представляет меньший интерес. Было показано [8], что эту область целесообразней строить не в параметрическом пространстве, как это делается обычно, а в пространстве конфигурационном. Этого можно добиться, исключив в неравенствах, определяющих область устойчивости, входящие туда коэффициенты редукции с помощью соотношений (1.4). Полученные неравенства будут содержать только один параметр μ, т.е. определять устойчивость для множества бинарных систем с одним и тем же μ и разными k. Чтобы получить условия устойчивости для конкретной бинарной системы (с фиксированными параметрами μ и k) нужно в полученной области выделить множества точек либрации, учитывающих связь коэффициентов редукции, даваемую соотношением (1.3). Сказанное иллюстрирует рис.1, где изображена указанная область для μ =0.2,0.4,0.4 и 0.9. Множество кривых пересекающих эту область (соответствующих разным значениям параметра k) представляет геометрическое место устойчивых точек либрации, заполненных микрочастицами различной парусности. В каждой точке такой кривой характеристическое уравнение линейной части порождающей системы, соответствующей (2.1), имеет три пары чисто мнимых корней



Область устойчивости семейства компланарных тотек для различных значений μ

$\pm\lambda_s$ i $(s=1,2,3)$, являющихся некоторыми функциями координат взятой точки [5].

Таким образом, порождающая система, соответствующая (2.1), относится к классу систем Ляпунова [9]. Саму же систему (2.1) при достаточно малых значениях e можно рассматривать как систему, близкую к системам Ляпунова с малым параметром e и тривиальным решением в качестве порождающего. Теория нахождения периодических движений таких систем (с периодом, равным периоду правой части системы (2.1)) достаточно детально разработана в [9]. В ней необходимо различать два случая в зависимости от того, есть или нет среди корней характеристического уравнения линейной части порождающей системы чисто мнимых корни вида $\pm pi$, где p – целое число. Ограничиваясь рассмотрением второго случая (нерезонансного), как более общего, для системы (2.1) можно сформулировать следующую теорему Пуанкаре [9].

Теорема 1. При достаточно малых значениях e в окрестности каждой точки либрации, взятой в области устойчивости, существует единственное 2π-периодическое решение системы (2.1), обращающееся в тривиальное при $e=0$ и представимое абсолютно сходящимся рядом

$$x_s(v) = eu_{s1}(v) + e^2u_{s2}(v) + \ \ldots, \qquad (S = 1, 2, 3) \tag{2.3}$$

расположенным по возрастающим степеням e, где $u_{sj}(v)$ - 2π-периодические функции истинной аномалии v.

Функции $u_{sj}(v)$ последовательно находятся в результате подстановки рядов (2.3) в систему (2.1) и приравнивания членов в левой и правой части системы при одинаковых степенях e. Так, для первого приближения будем иметь следующую линейную, неоднородную систему уравнений для определения функций $u_{sj}(v)$

$$\begin{aligned} &\ddot{u}_{11} - 2\dot{u}_{21} + c_{xx}u_{11} + c_{xz}u_{31} = \left(\frac{\partial W_x^*}{\partial e}\right)_0, \\ &\ddot{u}_{21} + 2\dot{u}_{11} + c_{yy}u_{21} = \left(\frac{\partial W_y^*}{\partial e}\right)_0, \\ &\ddot{u}_{31} + c_{zx}u_{11} + c_{zz}u_{31} = \left(\frac{\partial W_z^*}{\partial e}\right)_0. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Здесь индекс * означает, что частные производные должны быть взяты при $x = x^*$, $y = y^*$, $z = z^*$. При отсутствии у характеристического уравнения однородной системы, соответствующей

(2.1), корней вида $\pm pi$ система (2.4) обязательно имеет единственное 2π-периодическое решение [9]. Уравнения, аналогичные (2.4), получатся и для всех других функций $u_{sk}(v)$ (j>1) последующих приближений. Их правые части будут зависеть от тех 2π-периодических функций $u_{sk}(v)$, для которых $i < j$.

Относительно резонансного случая, требующего особого рассмотрения, заметим, что он может быть реализован лишь в счетном числе случаев, соответствующих тем точкам кривых семейства компланарных точек, в которых они пересекаются кривыми $\lambda_s(x,z) = p$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Радзиевский В.В.* Ограниченная задача трех тел с учетом светового давления // Астрон. ж. 1950. Т. 27. №4. С. 249-256.

2. *Kunitsyn A.L., Polyakhova E.N.* The restricted photo-gravitational three-body problem: a modern state // Astron and Astrophys. Trans. 1995. V. 6, №4. P. 283-293.

3. *Куницын А.Л., Чудаева А.М.* Об устойчивости скоплений микрочастиц гравитационно-репульсивном поле бинарных звездных систем // ПММ. 2003. Т. 67, вып. 5. С. 731-738.

4. *Лукьянов Л.Г.* Компланарные решения в фотогравитационной ограниченной круговой задаче трех тел // Астрон. ж. 1984. Т. 61, №4. С. 789-794.

5. *Куницын А.Л., Турешбаев А.Т.* О компланарных точках либрации фотогравитационной задачи трех тел // Письма в Астрон. журн. 1983. Т. 9, №7. С. 432-435.

6. *Турешбаев А.Т.* Об устойчивости компланарных точек либрации фотогравитационной задачи трех тел // Письма в Астрон. ж. 1986. Т. 12, №9. С. 722-725.

7. *Лукьянов Л.Г.* О семействе точек либрации в ограниченной фотогравитационной задаче трех тел // Астрон. ж. 1988. Т. 65, №2. С. 422-432.

8. *Куницын А.Л.* Об устойчивых формах пространственныхскоплений микрочастиц в гравитационно-репульсивном поле бинарных звездных систем // ПММ. 2007. Т. 71, вып. 6. С. 1037-1040.

9. *Малкин И.Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гос. изд. технико-теоретической литературы, 1956. 288 с.

Summary

An existence of a space periodic motions of a microparticles in the vicinity of a stable coplanar equilibrium positions in elliptic case of the photo-gravitational three-body problem is proved when eccentricity of the primaries is small enough.

Поступила 10.06.08г.