УДК 53.072; 53:681.3

А.И. КУПЧИШИН, А.К. ТОГАМБАЕВА, Т.А. ШМЫГАЛЕВА

КАСКАДНО-ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ФУНКЦИИ И МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ

Рассмотрена связь каскадно-вероятностных функций (КВФ) для электронов, протонов, альфа-частиц, ионов с Марковскими процессами и цепями Маркова.

Введение

Вопросы связи каскадно-вероятностных функций, энергетических спектров первично-выбитых атомов (ПВА), концентрации дефектов C и потоков вторичных частиц N с Марковскими процессами до настоящего времени никем не рассматривались. Изучение этих связей позволит расширить наши знания о происходящих процессах в веществах при прохождении через них высокоэнергетических частиц и по - иному посмотреть на эти явления, в частности, с общих позиций. Фактически все до сих пор полученные аналитические выражения для КВФ, энергетических спектров проходящих и вторичных частиц N и концентрации дефектов C можно вывести из уравнения Колмогорова-Чэпмена, задавшись соответствующими физическими и математическими моделями.

Связь КВ – метода с уравнениями Колмогорова – Чэпмена

Рассмотрим систему S, представляющую собой процесс взаимодействия частиц с веществом и испытания одного, двух, трех,..., n соударений. Такой процесс является стохастическим процессом с дискретным числом соударений и непрерывным по времени, а, следовательно, и по глубине проникновения частиц в веществе. Переходы системы S из состояния в состояние происходят, в частности, под влиянием пуассоновских потоков событий, поскольку в этом случае потоки ординарные и без последействия. Число событий, попадающих на любой участок времени $(t_0, t_0+\tau)$ имеет закон распределения вероятностей Пуассона /1/:

$$\rho_n = \frac{a^n}{n!} e^{-a}, \qquad (1)$$

где a - математическое ожидание числа точек, попадающих на участок:

$$a = \int_{t_0}^{t_0+T} \lambda(t)dt, \qquad (2)$$

$\lambda(t)$ - плотность потока или интенсивность.

Полагая в (1)

$$a = \frac{h-h'}{\lambda \cos\gamma},$$

получим /2/:

$$\psi_n(h',\lambda,\gamma) = \left(\frac{h-h'}{\lambda\cos\gamma}\right)^n \frac{1}{n!}\exp\left(-\frac{h-h'}{\lambda\cos\gamma}\right).$$

Здесь h' - глубина генерации частицы. Величина $\psi_n(h,\lambda,\gamma)$ имеет смысл вероятности того, что частица, падающая на границу вещества, достигнет глубины h после n-го числа соударений. Функция $\psi_0(h,\lambda)$ - вероятность пройти частицей глубину h без взаимодействий. Функции $\psi_1(h,\lambda,\gamma)$, $\psi_2(h,\lambda,\gamma)$, $\psi_3(h,\lambda,\gamma)$,..., $\psi_n(h,\lambda,\gamma)$ - вероятности достичь частице глубины h, испытав при этом одно, два, три,..., n соударений.

Процесс взаимодействия частиц с веществом является Марковским процессом и описывается вероятностями $\psi_0(h',h,\alpha_0)$, $\psi_1(h',h,\alpha_0)$,..., $\psi_n(h',h,\alpha_0)$, поскольку все вероятностные характеристики в будущем зависят лишь от того, в каком состоянии этот процесс находится в настоящее время и не зависят от того, каким образом этот процесс протекал в прошлом.

Марковская цепь представляет собой разновидность Марковского процесса, в котором будущее зависит от прошлого через настоящее.

Физические характеристики взаимодействия частиц с веществом, в том числе с твердым телом, с атмосферой Земли описываются цепью Маркова, поскольку условные вероятности наступления каждого события при данном испытании однозначно определяются результатом предыдущего состояния. Цепь Маркова полностью описывается заданием всех возможных вероятностей.

Для электронов, образующих первично-выбитые атомы, зависимость аппроксимационной функции от энергии, которая в свою очередь, зависит от глубины проникновения, представляется в следующем виде /3/:

$$\sigma = \sigma_0\left(1-\frac{1}{a(E_0-kh)}\right). \qquad (3)$$

В данном случае интенсивность потока зависит от глубины проникновения, следовательно, переходы системы S из состояния в состояние происходят под влиянием нестационарных пуассоновских потоков. Параметр распределения а определяется соотношением (2).

Из (1) получим при n =0:

$$\psi_0(h',h,\alpha_0) = \exp\left(-\int_{h'}^{h}\frac{dh''}{\lambda(h'')}\right). \qquad (4)$$

Отсюда имеем:

$$\psi_0(h',h,E_0) = \left(\frac{E_0-kh'}{E_0-kh}\right)^{\frac{1}{\lambda_0 ak}} \exp\left(-\frac{h-h'}{\lambda_0}\right), \qquad (5)$$

где $l = \frac{1}{\lambda_0 ak}$, λ_0, a, k — параметры аппроксимации, связанные с пробегом взаимодействия и коэффициентом удельных потерь энергии.

Из уравнения Колмогорова-Чэпмена /1,4/ получим рекуррентные соотношения для вероятностей перехода:

$$\Psi_n(h',h,E_0) = \int_{h'}^{h}\Psi_{n-k-1}(h',h'',E_0)\Psi_k(h'',$$

$$h,E_0)\frac{1}{\lambda_0}\left(1-\frac{1}{a(E_0-kh'')}\right)dh'', \qquad (6)$$

$$\Psi_n(h',h,E_0) = \int_{h'}^{h}\Psi_k(h',h'',E_0)\Psi_{n-k-1}(h'',$$

$$h,E_0)\frac{1}{\lambda_0}\left(1-\frac{1}{a(E_0-kh'')}\right)dh'' \qquad (7)$$

либо

$$\Psi_n(h',h,E_0) = \int_{h'}^{h}\Psi_0(h',h'',E_0)\Psi_{n-1}(h'',$$

$$h,E_0)\frac{1}{\lambda_0}\left(1-\frac{1}{a(E_0-kh'')}\right)dh'', \qquad (8)$$

$$\psi_n = \int_{h'}^{h}\psi_{n-1}(h',h'',E_0)\psi_0(h'',$$

$$h,E_0)\frac{1}{\lambda_0}\left(1-\frac{1}{a(E_0-kh'')}\right)dh''. \qquad (9)$$

Из рекуррентных соотношений (6)-(9) находим $\Psi_1, \Psi_2, ..., \Psi_n$.

$$\psi_n(h'h, E_0) = \frac{1}{n!\lambda_0^n}\left(\frac{E_0 - kh'}{E_0 - kh}\right)\exp\left(\frac{h - h'}{\lambda_0}\right) *$$

$$* \left[(h - h') - \frac{\ln\left(\frac{E_0 - kh'}{E_0 - kh}\right)}{ak}\right]^n,$$

Условные вероятности

$\psi_0(h', h, E_0)$, $\Psi_1(h', h, E_0), ..., \Psi_n(h', h, E_0)$

являются вероятностями перехода для неоднородной цепи Маркова, не имеющей стационарного режима.

В предельном случае при $k \to 0$, либо $a \to \infty$ КВ-функция переходит в простейшую КВФ, а следовательно, и в распределение Пуассона.

Аналогично получаем вероятности перехода для других частиц: протонов, альфа-частиц и ионов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т.1. М. Мир. 1984. 527с.

2. *Босс Э.Г., Купчишин А.И.* Решение физических задач каскадно-вероятностным методом. Алма-Ата. Наука КазССР. 1988. ч.1. 112с.

3. *Купчишин А.А., Купчишин А.И. Шмыгалева Т.А.* Компьютерное моделирование радиационно-физических задач. Монография. Алматы. Қазақ университеті. 2007. 432 с.

4. *Колмогоров А.Н.* Основные понятия теории вероятностей. - М.: Наука, 1974. - 119 с.

Резюме

Жұмыста радиациялық ақауларының пайда болу процестерінің Марков тізбегімен қарым-қатынастары қарастырылды. Электрондар, протондар альфа-бөлшектер, иондар Марков тізбегімен және Марков процестері үшін каскадты-ықтимал функциялары зерттелді.

Summary

In the work the correlation of processes Cascade – probabilistic functions (CPF) for electrons, protons, alpha rays, ions and Markov chains and Markov processes is studied.