УДК 517.946

М.К. КУРАИСОВ

АЙНЫМАЛЫ КОЭФФИЦИЕНТТІ ПАРАБОЛАЛЫҚ ТЕҢДЕУ ҮШІН ЛОКАЛДЫ ЕМЕС ШЕКАРАЛЫҚ ЕСЕП

Локалды емес шарттың тасымалдаушысы обылыс шекарасымен бас нүктеде қиылысқан кездегі үш өлшемді кеңістіктегі айнымалы коэффициентті параболалық теңдеу үшін локалды емес шекаралық есептің регуляр шешімінің бар екендігі регуляризациалау әдісімен дәлелденген

1. Есептің қойылуы. Берілген параболалық

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a(x,t)\Delta u(x,t) \tag{1}$$

теңдеуін, бастапқы

$$u(x,t)\big|_{t=0} = f(x) \tag{2}$$

шартын, шекаралық

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|_{x_1=0} = \varphi_1(x_2,x_3,t) \tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x_2}\right|_{x_2=0} = \varphi_2(x_1,x_3,t) \tag{4}$$

шарттарын және локалды емес шекаралық

$$u\big|_{x_3=0} + h(x_1,x_2,t)u\big|_{x_3=\gamma(x_1,x_2)} = \\ = \psi(x_1,x_2,t) \tag{5}$$

шартын қанағаттандыратын

$$\Omega_t \equiv \{(x,t): 0 < x_n < \infty, 0 < t < T \ (n=1,2,3)\}$$

обылысындағы регуляр $u(x,t)$ шешімін табу керек, мұндағы $x = (x_1,x_2,x_3) \in R^3$ нүкте.

А) Берілген $a(x,t) \in C_x^{1+\alpha}\, {}_t^{\frac{1+\alpha}{2}}(\Omega_t)$ және $a(x,t) = a_0 \geq 0$ коэффициент;

Б) $x_3 = \gamma(x_1,x_2) \in C^{1+\alpha}(0<\alpha<1)$ функциясы оң анықталған, бір мәнді функция және $\gamma(0,0)=0$;

В) Берілген $f(x_1,x_2,x_3) \in C^{1\,1\,0}_{x_1x_2x_3}(\Omega_0)$,

$\varphi_1(x_2,x_3,t) \in C^{1\,0\,0}_{x_2x_3t}(R^3_{+,t})$,

$\varphi_2(x_1,x_3,t) \in C^{1\,0\,0}_{x_1x_3t}(R^3_{+,t})$,

$\psi(x_1,x_2,t) \in C^{1\,1\,0}_{x_1x_2t}(R^3_{+,t})$,

$h(x_1,x_2,t) \in C(0,0,T)$

және шектелген функциялар;

Шешімнің тұйық обылыста үзіліссіз болуы үшін келесі

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{x_1=0} = \varphi_1(x_2,x_3,0);$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{x_2=0} = \varphi_2(x_1,x_3,0);$$

$$f(x_1,x_2,0) + h(x_1,x_2,0)f(x_1,x_2,\gamma(x_1,x_2)) = \\ = \psi(x_1,x_2,0);$$

$$\left.\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}\right|_{x_2=0} = \left.\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}\right|_{x_1=0};$$

$$\varphi_1(x_2,0,t) + h(0,x_2,t)\varphi_1(x_2,\gamma(0,x_2),t) = \\ = \left.\frac{\partial \psi}{\partial x_1}\right|_{x_1=0};$$

$$\varphi_2(x_1,0,t) + h(x_1,0,t)\varphi_2(x_1,\gamma(x_1,0),t) = \\ = \left.\frac{\partial \psi}{\partial x_2}\right|_{x_2=0};$$

келісім шарттары орындалуы керек.

2. Берілген обылыстағы (1) теңдеу үшін аралас есептің Грин функциясын құру

Келесі

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a(x,t)\,\Delta u(x,t)$$

теңдеуін бастапқы (2) шартын және нольдік шекаралық

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|_{x_1=0} = 0 \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial x_2}\right|_{x_2=0} = 0 \quad u\big|_{x_3=0} = 0$$

шарттарын қанағаттандыратын есепті қарастырайық.

$a(\xi,\tau)$ коэффициенттері $(\xi,\tau)\in\Omega_t$ нүктесінде «бекітілген» жылу өткізгіштік

$$u_t(x,t) = a(\xi,\tau)\,\Delta u(x,t)$$

теңдеуі үшін қосымша есептің Грин функциясы

$$Q_0(x\pm\xi,t-\tau;\xi,\tau) = \prod_{i=1}^{3} g_i(x_i\pm\xi_i,t-\tau;\xi,\tau)$$

функция болып табылады, мұндағы

$$g_i(x_i\pm\xi_i,t-\tau;\xi,\tau) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi\, a(\xi,\tau)(t-\tau)}}\left[e^{-\frac{(x_i-\xi_i)^2}{4a(\xi,\tau)(t-\tau)}} + e^{-\frac{(x_i+\xi_i)^2}{4a(\xi,\tau)(t-\tau)}}\right]; \qquad (i=1,2)$$

$$g_3(x_3\pm\xi_3,t-\tau;\xi,\tau) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi\, a(\xi,\tau)(t-\tau)}}\left[e^{-\frac{(x_3-\xi_3)^2}{4a(\xi,\tau)(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x_3+\xi_3)^2}{4a(\xi,\tau)(t-\tau)}}\right];$$

соңғы екі (ξ,τ) аргументі $a(\xi,\tau)$ коэффициентіне қатысты.

(1) теңдеудің Грин $Q(x,t;\xi,\tau)$ функциясын параметрикс әдісімен, параметрикс ретінде $Q_0(x\pm\xi,t-\tau;\xi,\tau)$ функциясын алып құрастырамыз

$$Q(x,t;\xi,\tau) = Q_0(x\pm\xi,t-\tau;\xi,\tau) +$$

$$\int_\tau^t d\lambda \int_0^\infty\!\!\int_0^\infty Q_0(x\pm\eta,t-\lambda;\eta,\lambda)\,\Phi(\eta,\lambda;\xi,\tau)\,d\eta =$$

$$= Q_0(x\pm\xi,t-\tau;\xi,\tau) + Q_1(x\pm\xi,t-\tau;\xi,\tau),$$

мұндағы $\Phi(x,t;\xi,\tau)$ белгісіз функция, оны $Q(x,t;\xi,\tau)$ функциясы (1) теңдеуді қанағаттандыратындай етіп таңдаймыз.

Белгісіз $\Phi(x,t;\xi,\tau)$ функциясы туралы алдын-ала

1. $t>\tau$ болған кезде $\Phi(x,t;\xi,\tau)$ функциясы үзіліссіз болады;

2.

$$|\Phi(x,t;\xi,\tau)| \le \frac{M}{(t-\tau)^{\frac{3-\alpha}{2}}}\prod_{i=1}^{3}\left[e^{-\delta\frac{(x_i-\xi_i)^2}{(t-\tau)}} + e^{-\delta\frac{(x_i+\xi_i)^2}{(t-\tau)}}\right];$$

3. $|\Phi(x,t;\xi,\tau)-\Phi(y,t;\xi,\tau)| \le$

$$\le \frac{M|x-y|^\beta}{(t-\tau)^{\frac{3-\mu}{2}}}\left\{\prod_{i=1}^{3}\left[e^{-\delta\frac{(x_i-\xi_i)^2}{(t-\tau)}} + e^{-\delta\frac{(x_i+\xi_i)^2}{(t-\tau)}}\right] + \prod_{i=1}^{3}\left[e^{-\delta\frac{(y_i-\xi_i)^2}{(t-\tau)}} + e^{-\delta\frac{(y_i+\xi_i)^2}{(t-\tau)}}\right]\right\};$$

деп тұжырымданады, мұндағы $\beta<\alpha$, $\mu=\alpha-\beta$.

Өзегі $Q(x,t;\xi,\tau)$ болатын келесі

$$V_0(x,t) = \int_0^\infty\!\!\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty f(\xi)\,Q(x,0;\xi,0)\,d\xi;$$

$$\omega_1(x,t) =$$

$$= \int_o^t d\tau \int_0^\infty\!\!\int_0^\infty \varphi_1(\xi_2,\xi_3,\tau)\,a(\xi,\tau)\,Q\big|_{\xi_1=0}\,d\xi_2\,d\xi_3;$$

$$\omega_2(x,t) =$$

$$= \int_o^t d\tau \int_0^\infty\!\!\int_0^\infty \varphi_2(\xi_1,\xi_3,\tau)\,a(\xi,\tau)\,Q\big|_{\xi_2=0}\,d\xi_1\,d\xi_3;$$

арнаулы потенциалдарды қарастырайық

Бұл потенциалдарға қатысты келесі леммалар орынды:

Лемма 1. Егер

$f(x_1,x_2,x_3)\in C^{1\,1\,0}_{x_1x_2x_3}(\Omega_0)$ және шектелген функция болса, онда $(x,t)\in(\Omega_t)$ болған кезде $V_0(x,t)\in C^{2\,1}_{x\,t}(\Omega_t)$ функция (1) теңдеуді қанағаттандырады, сонымен қатар

$$\lim_{t\to 0}V_0(x,t)=f(x);$$

$$\left.\frac{\partial V_0}{\partial x_1}\right|_{x_1=0}=0;\ \left.\frac{\partial V_0}{\partial x_2}\right|_{x_2=0}=0;\ V_0(x,t)\big|_{x_3=0}=0.$$

Лемма 2. Егер $\varphi_1(x_2,x_3,t)\in C^{1\,0\,0}_{x_2x_3t}(R^3_{+,t})$ және шектелген функция болса, онда $(x,t)\in(\Omega_t)$ болған кезде $\omega_1(x,t)\in C^{2\,1}_{x\,t}(\Omega_t)$ функция (1) теңдеуді қанағаттандырады, сонымен қатар

$$\lim_{x_1\to 0}\frac{\partial\omega_1}{\partial x_1}=\varphi_1(x_2,x_3,t);$$

$$\omega_1(x,t)\big|_{t=0}=0;\qquad \left.\frac{\partial\omega_1}{\partial x_2}\right|_{x_2=0}=0;$$

$$\omega_1(x,t)\big|_{x_3=0}=0.$$

Лемма 3. Егер $\varphi_2(x_1,x_3,t)\in C^{1\,0\,0}_{x_1x_3t}(R^3_{+,t})$ және шектелген функция болса, онда $(x,t)\in(\Omega_t)$ болған кезде $\omega_2(x,t)\in C^{2\,1}_{x\,t}(\Omega_t)$ функция (1) теңдеуді қанағаттандырады, сонымен қатар

$$\lim_{x_2\to 0}\frac{\partial\omega_2}{\partial x_2}=\varphi_2(x_1,x_3,t);\ \omega_2(x,t)\big|_{t=0}=0;$$

$$\left.\frac{\partial\omega_2}{\partial x_1}\right|_{x_1=0}=0;\ \omega_2(x,t)\big|_{x_3=0}=0.$$

3. Шекаралық (1)-(5) есебін сингулярлы интегралдық теңдеуге келтіру

Шекаралық (1)-(5) есебінің шешімін

$$u(x,t)=V_0(x,t)+\omega_1(x,t)+\omega_2(x,t)+$$

$$+\int_o^t d\tau\int_0^\infty\int_0^\infty\sigma(\xi_1,\xi_2,\tau)\,a(\xi,\tau)\left.\frac{\partial Q}{\partial\xi_3}\right|_{\xi_3=0}d\xi_1\,d\xi_2 \quad (6)$$

арнайы потенциалдардың қосындысы түрінде іздейміз, мұндағы $\sigma(x_1,x_2,t)$ белгісіз үзіліссіз функция.

Лемма 1-3 сүйене отырып, (6) теңдігімен анықталған $u(x,t)$ функциясы (1) теңдеуін бастапқы (2) шартын және шекаралық (3)-(4) шарттарын қанағаттандырады. Белгісіз $\sigma(x_1,x_2,t)$ функциясын $u(x,t)$ функциясы локалды емес (5) шартын қанағаттандыратындай етіп таңдаймыз. Ол үшін $u(x,t)$ функциясын (5) шартына пайдаланса $\sigma(x_1,x_2,t)$ функциясына қатысты сингулярлы интегралдық

$$\sigma(x_1,x_2,t)+h(x_1,x_2,t)\int_o^t d\tau\int_0^\infty\int_0^\infty\sigma(\xi_1,\xi_2,\tau)$$

$$a(\xi,\tau)\left.\frac{\partial Q}{\partial\xi_3}\right|_{\substack{\xi_3=0\\ x_3=\gamma(x_1,x_2)}}d\xi_1\,d\xi_2=$$

$$=\Psi(x_1,x_2,t) \quad (7)$$

теңдеуін аламыз, мұндағы

$$\Psi(x_1,x_2,t)=\psi(x_1,x_2,t)-h(x_1,x_2,t)(V_0(x,t)+$$

$$+\omega_1(x,t)+\omega_2(x,t))\big|_{x_3=\gamma(x_1,x_2)}.$$

Арнайы потенциалдардың қасиеттері мен келісім шарттарының арқасында $\Psi(x_1,x_2,t)$ үзіліссіз және $\Psi(x_1,x_2,0)=0$ функция.

Локалды емес $x_3=\gamma(x_1,x_2)$ шарттың тасымалдаушысы обылыс шекарасымен бұрыштық нүктеде қиылысқан кезде, интегралдық (6) теңдеудің айтарлықтай ерекшелігі бар. Интегралдық (6) теңдеудің шешімінің бар екендігін регуляризациялау әдісімен шешетін боламыз. Ол үшін интегралдық (6) теңдеудің ерекшелігін бөліп алып, келесі

$$\sigma(x_1,x_2,t)+h(x_1,x_2,t)\int_o^t d\tau\int_0^\infty\int_0^\infty\sigma(\xi_1,\xi_2,\tau)$$

$$H(x',t;\xi',\tau)\,d\xi_1\,d\xi_2=\Psi(x_1,x_2,t)-$$

$$-h(x_1,x_2,t)\int_o^t d\tau\int_0^\infty\int_0^\infty\sigma(\xi_1,\xi_2,\tau)[K(x',t;\xi',\tau)-$$

$$-H(x',t;\xi',\tau)]d\xi_1\,d\xi_2 \qquad (8)$$

түрде көшіріп жазайық, мұндағы

$$K(x',t;\xi',\tau)=$$

$$=\frac{1}{(2\sqrt{a(\xi',\tau)\pi(t-\tau)})^3}\frac{\gamma(x_1,x_2)e^{-\frac{\gamma^2(x_1,x_2)}{4a(\xi',\tau)(t-\tau)}}}{t-\tau}$$

$$K(x',t;\xi',\tau)=$$

$$=\frac{1}{(2\sqrt{a(\xi',\tau)\pi(t-\tau)})^3}\frac{\gamma(x_1,x_2)e^{-\frac{\gamma^2(x_1,x_2)}{4a(\xi',\tau)(t-\tau)}}}{t-\tau}$$

$$\prod_{n=1}^{2}[e^{-\frac{(x_i-\xi_i)^2}{4a(\xi',\tau)(t-\tau)}}+e^{-\frac{(x_i+\xi_i)^2}{4a(\xi',\tau)(t-\tau)}}]+$$

$$+\int_{\tau}^{t}d\lambda\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}Q_0\big|_{x_3=\gamma(x_1,x_2)}\Phi\big|_{\xi_3=0}d\eta=$$

$$=K_1(x',t;\xi',\tau)+Q_1(x',t;\xi',\tau)\big|_{\substack{x_3=\gamma(x_1,x_2)\\ \xi_3=0}};$$

$$H(x',t;x',t)=$$

$$=\frac{1}{(2\sqrt{a(x',t)\pi(t-\tau)})^3}\frac{(k_1x_1+k_2x_2)e^{-\frac{(k_1x_1+k_2x_2)^2}{4a(x',t)(t-\tau)}}}{t-\tau}$$

$$\prod_{i=1}^{2}[e^{-\frac{(x_i-\xi_i)^2}{4a(x',t)(t-\tau)}}+e^{-\frac{(x_i+\xi_i)^2}{4a(x',t)(t-\tau)}}];$$

Лемма 4. Егер (1) теңдеудің коэффициенттері $a(x,t)\in C_{x\ t}^{1+\alpha\ \frac{1+\alpha}{2}}(\Omega_t)$ және $a(x,t)=a_0\geq 0$, ал $x_3=\gamma(x_1,x_2)\in C^{1+\alpha}(0<\alpha<1)$ және $\gamma(0,0)=0$ функция болса, онда $H_1(x',t;\xi',\tau)=K(x',t;\xi',\tau)-H(x',t;x',t)$ өзегінің ерекшелігі әлсіз (интегралданатын) болады және

$$|H_1(x',t;\xi',\tau)|\leq\frac{M}{(t-\tau)^{\frac{4-\alpha}{2}}}[\prod_{n=1}^{\infty}e^{-\delta\frac{(x_n-\xi_n)}{t-\tau}}+$$

$$+e^{-\delta\frac{(x_n+\xi_n)}{t-\tau}}]$$

бағалауын қанағаттандырады.

4. Сипаттаушы (7) теңдеуінің шешімі

Интегралдық (8) теңдеуін келесі

$$\sigma(x_1,x_2,t)+h(x_1,x_2,t)\int_o^t d\tau\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\sigma(\xi_1,\xi_2,\tau)\times$$

$$\times H(x',t;\xi',\tau)\,d\xi_1\,d\xi_2=\Psi_1(x_1,x_2,t) \qquad (9)$$

түрде көшіріп жазайық.

Алдымен

$$H=\int_o^t\frac{1}{(2\sqrt{a(x',t)\pi(t-\tau)})^3}$$

$$\frac{(k_1x_1+k_2x_2)e^{-\frac{(k_1x_1+k_2x_2)^2}{4a(x',t)(t-\tau)}}}{t-\tau}d\tau$$

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\prod_{i=1}^{2}[e^{-\frac{(x_i-\xi_i)^2}{4a(x',t)(t-\tau)}}+e^{-\frac{(x_i+\xi_i)^2}{4a(x',t)(t-\tau)}}]d\xi_1\,d\xi_2$$

интегралдық операторын зерттейік.

Интегралдық H операторына қатысты келесі тұжырымдар орынды

Лемма 5. Келесі

$$\|H\|=\left|\int_o^t\frac{(k_1x_1+k_2x_2)e^{-\frac{(k_1x_1+k_2x_2)^2}{4a(x',t)(t-\tau)}}}{(2\sqrt{a(x',t)\pi(t-\tau)})^3(t-\tau)}d\tau\right.$$

$$\left.\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\prod_{i=1}^{2}[e^{-\frac{(x_i-\xi_i)^2}{4a(x',t)(t-\tau)}}+e^{-\frac{(x_i+\xi_i)^2}{4a(x',t)(t-\tau)}}]d\xi_1\,d\xi_2\right|\leq 1$$

теңсіздігі орынды.

Лемма 6. Егер $\sigma(x_1,x_2,t)\in C_{x_1,x_2,t}^{\alpha,\alpha,\frac{\alpha}{2}}$ және $\sigma(x_1,x_2,0)=0$ болса, онда $H\,\sigma(x_1,x_2,t)\in C_{x_1,x_2,t}^{\alpha,\alpha,\frac{\alpha}{2}}$ және $H\,\sigma(x_1,x_2,t)\big|_{t=0}=0$.

Сипаттаушы интегралдық (9) теңдеуін

$$\sigma(x_1,x_2,t)+$$
$$+h(x_1,x_2,t)H\sigma(x_1,x_2,t)=\Psi_1(x_1,x_2,t)$$
операторлық түрде жазайық.

Сонда, $|h|=\max(h(x_1,x_2,t))<1$ шешілу шарты орындалған кезде hH операторы сығылу операторы болып табылады, сондықтан $(E+hH)^{-1}$ шектелген операторы бар және сипаттаушы интегралдық (9) теңдеуінің шешімін

$$\sigma(x_1,x_2,t)=(E+hH)^{-1}\Psi_1(x_1,x_2,t)=$$
$$=R\,\Psi_1(x_1,x_2,t), \qquad (12)$$
түрінде жазуға болады, мұндағы E-бірлік операторы.

Теорема 1. Егер $|h|<1$ шешілу шарты орындалса, онда (9) сипаттаушы интегралдық теңдеуінің (12) формуласымен анықталған жалғыз шешімі бар болады.

5. Сингулярлы интегралдық (7) теңдеуінің шешілуі

Интегралдық (7) теңдеуін регуляризациялау әдісі арқылы шешетін боламыз. Осы мақсатпен (9) теңдеуін келесі операторлық түрде

$$\sigma(x_1,x_2,t)+hH\sigma(x_1,x_2,t)=$$
$$=\Psi(x_1,x_2,t)-h[K-H]\sigma(x_1,x_2,t) \qquad (13)$$
көшіріп жазайық. Интегралдық (12) теңдігін (13) теңдеуңне қолдану арқылы пара пар

$$\sigma(x_1,x_2,t)=(E+hH)^{-1}(\Psi(x_1,x_2,t)-$$
$$-h[K-H]\sigma(x_1,x_2,t))$$
немесе

$$\sigma(x_1,x_2,t)+hR[K-H]\sigma(x_1,x_2,t)=$$
$$=R\Psi(x_1,x_2,t), \qquad (14)$$
теңдеуімен алмастыруға болады, мұндағы $R\Psi(x_1,x_2,t)$ бос мүшесі шектелген үзіліссіз функция.

R операторы сызықты шектелген, ал $[K-H]$ операторы ерекшелігі әлсіз оператор болғандықтан, $R[K-H]$ көбейтіндісі де ерекшелігі әлсіз (интегралданатын) интегралдық оператор болып табылады. Сондықтан регуляризацияланған интегралдық (14) теңдеуінің шешімін біртіндеп жуықтау әдісі арқылы табуға болады. Табылған $\sigma(x_1,x_2,t)$ шешімі шектелген және үзіліссіз функция болып табылады.

Теорема 2. Егер А), Б) және В) шарттары және $|h|<1$ шешілу шарты орындалса, онда (1)-(5) шекаралық есебінің (6) теңдігімен анықталған регуляр шешімі бар болады, мұндағы $\sigma(x_1,x_2,t)$ функциясы регуляризацияланған интегралдық (14) теңдеуінен анықталады.

ӘДЕБИЕТ

1. *Кураисов М.К.* Нелокальная краевая задача 2-го рода для параболического уравнения с переменными коэффициентами// Вестник КазНУ. 2007. №1(52). С.24-32.

2. *Орынбасаров М.* О разрешимости нелокальной краевой задачи для параболического уравнения в угловой точке// Исследование по теории дифференциальных уравнении. 1992. С.79-88.

3. *Орынбасаров М.* Теория тепловых потенциалов и ее применение. Алматы, 2005. 70 с.

Резюме

Методом регуляризации доказано существование регулярного решения нелокальной краевой задачи для параболического уравнения с переменными коэффициентами когда носитель нелокального условия пересекается с границей области в начальной точке.

Summary

The method of regularization it is proved existence of the regular decision of non-local regional problem for the parabolic equation with variable factors when the carrier of non-local condition is crossed with border of area in an initial point.

әл-Фараби атындағы ҚазҰУ

24.06.2008 ж. қабылданды