

З. К. КУРАЛБАЕВ, А. А. ТАУРБЕКОВА

(Алматинский университет энергетики и связи, г. Алматы)

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

МАНТИЙНОГО ДИАПИРИЗМА

Аннотация

Проведен анализ геофизических и геологических данных о тектонических процессах, происходящих в периферийных слоях Земли, под воздействием локальных поднятий разогретых мантийных веществ из нижней мантии. Используется предположение о том, что возникает разность плотностей веществ, поступающих из нижней мантии, и веществ вышележащего астеносферного слоя. Здесь этот процесс рассмотрен как процесс гидродинамической неустойчивости. Для описания этого процесса использована физическая модель сильновязкой жидкости при малых числах Рейнольдса. На основании анализа имеющихся в литературе данных о мантийном и соляном диапиризме, предложена механико-математическая модель процесса поднятия мантийных веществ из-за разности плотностей между вышележащим и нижележащим слоями. В результате механико-математического моделирования процесса мантийного диапиризма получено аналитическое решение математической задачи. Сравнение полученных результатов аналитического решения показывает хорошее совпадение с данными, полученными из проведенных экспериментов и наблюдений за соляными куполами.

Ключевые слова: мантийные вещества, модель, диапиризм.

Кілт сөздер: мантиялық заттар, үлгі, диапиризм.

Keywords: m

Введение. В изучении Земли одной из важных задач является определение зависимости наблюдаемых на поверхности земной коры процессов и явлений от процессов, происходящих в глубинных недрах Земли. Эта задача важна и ее решение актуально при изучении структуры и развитии земной коры.

По данным геофизических и геологических исследований, существует слабый (астеносферный) слой, ограниченный сверху твердой литосферой и снизу также твердой мезосферой [1-8]. И здесь появляется проблема о том, как учитывать влияние нижележащих областей Земли на движения и процессы, происходящие в астеносферном и литосферном слоях, и как оно отражается на земной поверхности.

Ограниченность объема информации о физических свойствах веществ нижележащей мантии и о процессах, происходящих в ней, вынуждают сделать некоторые допущения.

В исследованиях последних лет [9-15] авторы в основном предполагают существование локальных поднятий разогретых легких веществ из нижней мантии, что является источником движений веществ астеносферы как в вертикальном направлении, так и растекания их в горизонтальных направлениях. Этот подход используется также для объяснения происхождения так называемых «горячих пятен» [13, 14]. Было замечено, что кроме срединно-океанических хребтов, островных дуг и активных континентальных окраин, интенсивный магматизм проявляется также в отдельных районах внутри плит; типичный пример этого – Гавайи [9-15]. Такие аномальные области («горячие пятна») на срединно-океанических хребтах имеются в Исландии и на Азорских островах. Согласно теории тектоники литосферных плит «горячие пятна» связаны со струями, исходящими из горячих глубин земной мантии, видимо, при большой интенсивности потока магматических веществ и проницаемости тектоносферы.

Исходя из вышесказанного, можно предполагать, что существуют локальные поднятия и опускания подастеносферного основания. Как было отмечено выше, здесь ставится задача об определении аналитической формы этих поднятий и опусканий, т.е. требуется определить вид функции, описывающей изменение подастеносферного основания.

Итак, здесь ставится следующая проблема: как можно определить влияние активных процессов, происходящих в нижележащей мантии, на астеносферу и литосферу, на процесс образования земных структур? Одним словом,

необходимо определить граничные условия астеносферы и мезосферы, т.е. на подастеносферном основании.

В литературе о Земле [1-4] рассматриваются различные гипотезы и предположения о механизмах взаимодействия астеносферного слоя с нижележащей мантией. В большинстве случаев тектоническая активность связывается с поднятием вверх сильно нагретых расплавленных мантийных веществ, и это рассматривается как основная причина многих тектонических процессов. Как отмечено выше, мантийные вещества поступают в астеносферу через ограниченные участки подастеносферного основания. В зависимости от интенсивности процессов, происходящих в нижележащей мантии, а также проницаемости тектоносферы, возможны различные варианты механизма взаимодействия астеносферы с нижележащим слоем. К таковым относятся механизм мантийного диапиризма, адвекции, появления плюма и другие.

В связи с этим для решения поставленной здесь проблемы можно рассматривать различные граничные условия на подастеносферном основании, вытекающие из допущений и предположений о механизмах рассматриваемых процессов.

Один из механизмов подъема мантийных веществ и проникновения их в астеносферу предполагает, что мантийные вещества накапливаются в нижней части астеносферы, растекаясь в горизонтальных направлениях, вследствие чего появляется новый слой сильновязкой жидкости. В этом случае движения в астеносферном слое необходимо моделировать как движения двухслойной жидкости, когда плотность нижележащего слоя меньше, чем плотность вышележащего слоя. Очевидно, возникает задача о гидродинамической неустойчивости в двухслойной сильновязкой жидкости. Здесь возможны, в свою очередь, следующие варианты: когда продолжается поступление новых мантийных веществ из нижележащего слоя и когда прекращается такая «подпитка».

В случае, когда объем накопленной массы мантийного вещества значителен или продолжается «подпитка» новыми поступлениями этого вещества из нижней мантии, происходит подъем веществ нижнего слоя вверх и опускание более тяжелых веществ верхнего слоя. В результате этого процесса вершина границы между этими слоями может достичь верхнюю границу астеносферы, т.е. подошву литосферы, вследствие чего могут возникнуть в теле литосферы крупные разломы, рифтовые зоны,

сопровожаемые такими явлениями, как вулканизм, магматизм, сейсмическая активность и другие.

Возможен вариант, когда интенсивность этих процессов является недостаточной или проницаемость тектоносферы поднимающимися мантийными веществами будет незначительной, то на каком-то уровне может произойти остановка поднятия границы между слоями. Происходит неполная конвекция. Такое явление в геотектонике получило название «адвекция». При таком механизме также возможны различные процессы, оказывающие влияние на движения в астеносфере и литосфере.

В случае, когда в астеносферу попадает ограниченный объем мантийных веществ и прекращается процесс поступления их, то может быть появление т.н. плюма. Плюм представляет собой отдельную сплошную массу мантийных веществ, ограниченную со всех сторон астеносферными веществами. Из-за разности плотностей плюма и окружающей среды это тело движется вверх, создавая определенные условия появлению различных процессов. Плюм обнаруживается геофизическими методами как в тектонически активных областях, так и под относительно стабильными континентальными плитами. Изучение плюма стало актуальным в связи с исследованием таких тектонически активных областей, как рифтовые зоны, в частности, Байкальской рифтовой зоны (Н. Л. Добрецов, А. Г. Кирдяшкин, А. А. Кирдяшкин, С. А. Тычков и другие).

Описанные выше механизмы проникновения мантийных веществ в астеносферу возможны в тех случаях, когда они не перемешиваются с веществами астеносферы.

Если мантийные вещества, поступающие в астеносферу из нижней мантии, перемешиваются с веществами астеносферы, то процесс будет иметь совершенно иной вид. Тогда задача об астеносферных движениях будет поставлена по-другому. В этом случае будут рассматриваться движения в вязком слое, когда в какой-либо локальной области на нижней его границе задана скорость поднятия или опускания (или расход жидкости). И здесь возможны различные варианты: либо этот процесс непрерывный, когда за длительное геологическое время происходит «обмен веществами» между астеносферой и нижележащей мантией (конвективный механизм), либо этот процесс связан с кратковременным «выбросом» мантийных веществ в астеносферу («пульсационный» механизм).

В отличие от традиционных представлений конвективных движений в мантии (McKenzie D.P., Roberts J.M., Weiss N.O., Nakada Masao, Григорьев А.С., Толкунова Т.Л. и др.) Ержанов Ж.С. пред-лагал рассматривать модель, в которой предполагается существование под астеносферой «стоков» и «источников» мантийных веществ. Такой механизм течений мантийных веществ мог бы дать возможность описанию таких интересных явлений, как раздвижения (спрединг) и субдукция литосферных плит. Интерес к этой проблеме связан в связи с всевозрастающим проявлением интересов к исследованиям океанических окраин (Ю. М. Пуцаровский, Е. Н. Меланхолина, А. В. Пейве, С. В. Руженцев и др.) и срединно-океанических хребтов. Решение таких задач было бы полезным и для описания тектоники литосферных плит, что дало бы возможность оценить многие утверждения гипотезы о дрейфе континентов.

Сделан краткий обзор возможных механизмов тектонических движений под действием эндо-генных процессов, предполагаемых в различных геологических гипотезах. Это показало широту спектра задач, возникающих при решении поставленной здесь проблемы, особенно задач механики сплошных сред.

В дальнейшем в данной работе будут рассмотрены вопросы о формулировке граничных условий задач о взаимодействии астеносферы с нижележащей мантией для некоторых вариантов, описанных выше механизмов.

1. ФИЗИЧЕСКАЯ СУЩНОСТЬ МЕХАНИЗМА ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Теперь возникает вопрос: как происходит процесс взаимного проникновения веществ жидких слоев с большими динамическими коэффициентами вязкости и когда плотность нижнего слоя меньше, чем плотность верхнего слоя? Здесь приведено описание процесса, происходящего на границе таких двух слоев сильновязкой жидкости.

Пусть рассматривается декартова система координат xOz (рисунок) и в некоторый начальный момент времени $t = 0$ в окрестности некоторой точки (для определенности при $x = 0$) на границе между слоями жидкости произошло нарушение равновесного состояния. Это означает, что функция

$\xi(x,t)$, которая описывает эту границу, получает приращение в окрестности точки $x = 0$, т.е. при $\Delta x > 0$ изменение функции $\Delta \xi = \xi(\Delta x, t) - \xi(0, t)$.

Тогда создается перепад давления в нижнем слое $\Delta p = p_1(\Delta x, t) - p_1(0, t)$.

Из-за малости толщин слоев жидкости считалось, что безразмерное давление в нижнем слое определяется формулой [19]:

$$p_1 = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1} \cdot \xi_1 - z + \frac{\rho_2}{\rho_1} \cdot \xi_2,$$

где $\xi_1 = \xi_1(x, t)$, а ξ_2 считается пока постоянной величиной. В этом случае перепад давления равен $\Delta p = (\rho_1 - \rho_2) \cdot [\xi_1(\Delta x, t) - \xi_1(0, t)]$.

Если считать, что при $x = 0$ функция $\xi(x, t)$ достигает своего максимума, то при положительном значении приращения аргумента ($\Delta x > 0$) приращение функции равно $\Delta \xi_1 = \xi_1(\Delta x, t) - \xi_1(0, t)$.

Отсюда следует, что при $\rho_1 > \rho_2$ перепад давления $\Delta p < 0$ для области $x > 0$. Из-за такого отрицательного перепада давления возникает движение в нижнем слое жидкости, горизонтальная скорость которой направлена от центра поднятия границы ($x = 0$) в сторону ее опущенных областей, т.е. происходит перетекание жидкости для восстановления равновесного состояния. Этот процесс изучен достаточно хорошо, и механизм его считается во многом понятным. Результаты решения подобной задачи использованы для описания поднятия земной коры после дегляциации, в частности, послеледникового поднятия Фенноскандии [5].

Пусть теперь $\rho_1 < \rho_2$, тогда для области $x > 0$ перепад давления $\Delta p > 0$. Это означает, что из-за положительного значения перепада давления возникает движение в обратном направлении, т.е. вещества нижнего слоя из близлежащих областей двигаются к центру поднятия границы ($x = 0$), а вещества верхнего слоя, находящиеся над областью поднятия границы между слоями, перемещаются в области ее опускания.

В достаточно удаленных от центра поднятия точках перепад давления практически равен нулю, следовательно, там и горизонтальная скорость жидкости должна быть пренебрежимо малой. Поэтому поднимающиеся вещества нижнего слоя компенсируются за счет веществ, близлежащих к центру поднятия областей и там происходит опускание границы $z = \xi_1(x, t)$; эти области будут заполнены веществами верхнего слоя. Этот процесс, в свою очередь, увеличивает перепад давления, ускоряющий подъем веществ в точках окрестности центра поднятия.

Опускание более плотных веществ верхнего слоя в центре рассматриваемой области противодействует перетеканию веществ из удаленных от центра областей. Это обеспечивает локальность поднятия веществ нижнего слоя. Увеличивающийся перепад давления может вызывать при благоприятных условиях появление новых локальных поднятий веществ нижнего слоя в областях, расположенных в достаточно большом расстоянии от рассматриваемого локального поднятия границы между слоями.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ГРАНИЦЫ МЕЖДУ ВЯЗКИМИ СЛОЯМИ

Вышесказанное показывает физическую сущность изучаемого процесса, происходящего на границе двух слоев с разными плотностями. Для количественного анализа этого процесса необходимо попытаться получить закон изменения этой границы в виде аналитической формулы. Для этого должны быть поставлены и решены математические задачи, полученные в результате механико-математического моделирования рассматриваемого здесь процесса.

Очевидно, что математические задачи, которые будут здесь поставлены и решены, связаны с дифференциальными уравнениями в частных производных. Для поиска частных решений этих уравнений, а также для анализа полученных при этом результатов, должны быть заданы начальные и граничные условия. В отличие от обычных задач уравнений математической физики здесь имеются некоторые особенности в постановке этих задач, а также в формулировке условий их решения.

Как было отмечено ранее, процесс поднятия веществ нижнего слоя и опускания веществ верхнего слоя сильновязкой жидкости является очень медленным и продолжительным. Поэтому здесь могут быть рассмотрены задачи «без начальных условий» [20]. Предполагается, что при $t \rightarrow -\infty$ граница между слоями жидкости находилась в первоначальном равновесном состоянии и началось медленное поднятие некоторого малого участка этой границы из-за нарушения равновесного состояния. Тогда задача должна быть рассмотрена в промежутке времени $-\infty < t < t_1$, где t_1 – момент времени, соответствующий достижению вершины границы до верхней границы верхнего слоя жидкости. После этого момента происходит «разрыв» верхнего слоя и нарушение условия неразрывности, которое предполагалось в постановке задачи.

Здесь целесообразно обратиться к физической сущности рассматриваемой задачи. В данной задаче движение самой жидкости и изменение границы между ее слоями будут свободными. Влияние всех факторов, кроме сил тяжести и вязкости, пренебрегается. Движения происходят из-за разности плотностей слоев. Тогда можно считать справедливым следующее утверждение: при свободном движении тяжелой несжимаемой сильновязкой жидкости в поле сил тяжести, под воздействием разности плотностей ее слоев изменение их границы в любой точке приведет к соответствующим

изменениям в других ее точках.

Из этого утверждения следует, что при решении задачи об изменении границы между слоями жидкости достаточно рассматривать ее положение только в одной характерной точке. Это означает, что можно зафиксировать (измерить) значения высоты поднятия вершины (при $x = 0$) локального поднятия для любых моментов времени. Например, для $t = 0$ (начало отсчета времени) или для $t = 1$ (конец рассматриваемого промежутка времени). Заметим, что выбор моментов времени является условным.

Такой подход полезен и для практики. В большинстве случаев при исследовании процессов, происходивших в земной коре, определяются данные за последние периоды или положения на настоящий момент времени. Затем ставится задача об определении их в ранние геологические периоды времени. Этот подход будет использован в дальнейшем, при решении частных задач.

Теперь необходимо рассматривать вопрос о граничных условиях. Как уже предполагалось, рассматривается отдельное локальное поднятие границы между слоями жидкости. Из-за изотропности рассматриваемых слоев положение границы считается симметричным относительно вертикальной оси z . Это позволяет ограничиваться рассмотрением полубесконечной области $0 \leq x < \infty$, считая центром поднятия точку при $X = 0$. Тогда функция $\xi(x, t)$, определяющая рассматриваемую границу, удовлетворяет условию $\xi(-x, t) = \xi(x, t)$.

Так как в точке $x = 0$ функция $\xi(x, t)$ достигает своего максимума, поэтому можно использовать здесь следующее граничное условие:

$$\frac{\partial \xi(x, t)}{\partial x} = 0.$$

На правой границе промежутка $[0, \infty]$ задано условие равенства нулю искомой функции $\xi(\infty, t) = 0$.

Следует заметить, что для аналитического решения данной задачи условие в бесконечной точке не вызывает никаких проблем. Однако численное решение задачи с таким граничным условием вызывает определенную трудность. Во многих случаях условие в бесконечности заменяется условием в конечной точке $x = x_N$, для которой и для значений $x > x_N$ искомая функция имеет достаточно малые значения или производная функции будет считаться равной нулю.

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРХНЕЙ КУПОЛООБРАЗНОЙ ГРАНИЦЫ ВОСХОДЯЩЕГО МАНТИЙНОГО ПОТОКА

Пусть считается, что в нижней части астеносферного слоя в локальной области появился некоторый слой менее плотных мантийных веществ.

Вещества обоих слоев не перемешиваются. Здесь возникает задача об определении границы между этими слоями, когда плотность веществ нижнего слоя меньше, чем плотность верхнего слоя. Следует обратить внимание на тот факт, что эта граница является подвижной.

Задачу, поставленную в предыдущем пункте, об определении аналитической функции, описывающей изменение подастеносферного основания, можно решить двумя способами. В одном случае нужно ставить задачу о гидродинамической неустойчивости, когда слой нижележащей жидкости имеет меньшую плотность, чем плотность вышележащего слоя жидкости. Другим способом определения искомой функции может быть аппроксимация имеющихся данных экспериментов и наблюдений за подобными явлениями.

Вначале рассматривается второй способ определения общего вида искомой функции на основе анализа данных о таком известном явлении, как процесс поднятия соляных толщ и образования соляных куполов. В геологии этот процесс называется соляным диапиризмом [17, 18]. Проблеме изучения соляных толщ посвящено достаточно большое количество исследований и актуальность ее не вызывает сомнения. Она связана прежде всего с разведкой и добычей нефти и газа. В данной статье непосредственно эти вопросы не рассматриваются. Однако используются результаты исследования этих процессов, выполненные различными исследователями тектоники соляных толщ и опубликованные в печати. Причиной этому является аналогия между процессом соляного диапиризма и мантийного диапиризма, предполагаемого как одна из причин тектонических движений в системе «литосфера – астеносфера».

Согласно распространенному среди геологов мнению о появлении соляных куполов [17], механизм поднятия соли, плотность которой меньше, чем плотность горных пород, окружающих ее, аналогичен мантийному диапиризму, когда расплавленные легкие мантийные вещества поднимаются вверх. Имеются экспериментальные исследования, в частности, Рамберга [18], где показана форма границы поднимающихся веществ. А Ховард [17] с помощью моделирования на ЭВМ результатов наблюдений за поднятием соляных толщ получил графический вид этой границы (рисунок).

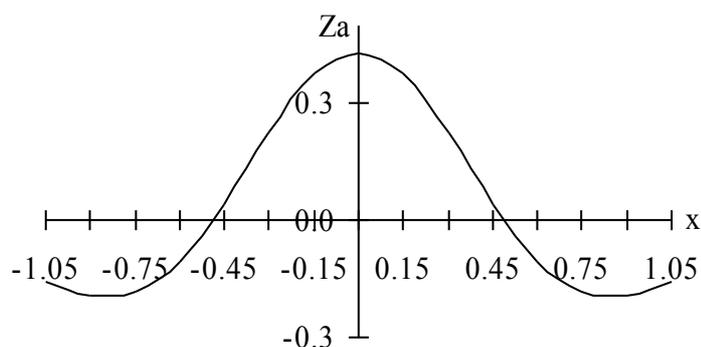


График функции $Z_a(x, t)$ при $n = 1$

Сравнение результатов, полученных Ховардом [17] и Рамбергом [18], показывает, что график функции, приведенный на рисунке, достаточно хорошо согласуется с результатами экспериментов, проведенных Рамбергом. Однако этот график показывает только общую графическую форму границы. По нему нельзя определить аналитическую формулу для ее описания и динамику процесса, т.е. изменение искомой функции по времени t .

Несмотря на это, можно принять этот график функции, как аппроксимирующую кривую экспериментальных данных Рамберга и наблюдений за поднятием соляных куполов. Следует отметить, что Ховардом были отмечены ряд свойств функции, которые могут быть использованы при построении аналитической формулы этого графика.

Пусть искомая функция обозначена $z = Z_a(x, t)$. Время t пока будет рассматриваться как параметр, а зависимость искомой функции $z = Z_a(x, t)$ от этого параметра будет пока неизвестной. Потому что по графическим данным Ховарда и Рамберга нельзя установить такую зависимость от времени t .

Необходимо отметить, что рассматривается некоторое отдельное (локальное) поднятие веществ нижележащего слоя. Из-за сильной вязкости данного слоя предполагается, что другое поднятие удалено от первого на достаточно большое расстояние.

Здесь возникает задача об определении аналитической формулы, описывающей границу между поднимающейся жидкостью и окружающей ее средой, приведенной на рисунке 1, где z – вертикальная, x – горизонтальная ось, t – время.

Исходя из анализа, проведенного Ховардом [17] и Рамбергом [18], вначале необходимо сформулировать те условия, которым должна удовлетворить искомая функция $z = Z_a(x,t)$, т.е. сформулировать основные ее свойства. Они таковы:

1) функция $z = Z_a(x,t)$ должна иметь некоторую точку локального максимума (минимума). Это означает, что вещества нижнего слоя поднимаются вверх по некоторым, сравнительно небольшим размерам, «каналам». Не ограничивая общность можно допустить, что локальный максимум (минимум) достигается в точке $x=0$, и ее можно называть центром поднятия (опускания);

2) функция $z = Z_a(x,t)$ должна быть определена и непрерывна везде, $x \in (-\infty, +\infty)$;

3) функция $Z_a(x,t)$ является четной и симметричной относительно ординат z , т.е. выполняется условие $Z_a(-x,t) = Z_a(x,t)$.

4) в точках, достаточно удаленных от центра поднятия ($x = 0$), функция имеет очень $Z_a(x,t)$ малые значения, т.е. при $x \rightarrow +\infty$ и $x \rightarrow -\infty$ предел $\lim Z_a(x,t) = 0$;

5) из условия сохранения массы (объема) веществ следует условие равенства нулю следующих интегралов:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Z_a(x,t) dx = \int_0^{+\infty} Z_a(x,t) dx = \int_{-\infty}^0 Z_a(x,t) dx = 0;$$

6) площади областей поднятия и опускания равны, т.е.

$$\left| \int_{-x_0}^{+x_0} Z_a(x,t) dx \right| = 2 \cdot \left| \int_0^{+\infty} Z_a(x,t) dx \right|,$$

где $x = \pm x_0$ – точки пересечения графика функций с осью абсцисс, т.е.

$$Z_a(\pm x_0, t) = 0.$$

Все вышеназванные свойства функции относятся к кинематике рассматриваемой задачи о медленном поднятии легких веществ – вверх, а тяжелых – вниз.

Общий вид искомой функции $Z_a(x,t)$, удовлетворяющий всем вышеперечисленным условиям, может быть записан в следующем виде:

$$Z_a(x,t) = \psi(t) \cdot \exp(-\varphi(t) \cdot x^2) \cdot [1 - b(t) \cdot x^{2n}], \quad (1)$$

где $\psi(t)$, $\varphi(t)$, $b(t)$ – неизвестные пока функции времени t , а n – целое число ($n = 1, 2, 3, \dots$); причем $\varphi(t) > 0$. Функция (1) справедлива для локального поднятия. Если рассматривается локальное опускание, то знак перед ней будет отрицательным.

Из условия равенства нулю интегралов (условия 5) можно получить взаимозависимость между функциями $\varphi(t)$, $b(t)$ и параметром n :

$$b(t) = \frac{[2\varphi(t)]^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)} \quad (2)$$

Тогда формула (1) может иметь другой вид:

$$Z_a(x, t) = \psi(t) \cdot \exp[-\varphi(t) \cdot x^2] \cdot \left\{ 1 - \frac{[2 \cdot \varphi(t) \cdot x^2]^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2 \cdot n - 1)} \right\} \quad (3)$$

и искомая функция будет зависеть от двух неизвестных функций $\psi(t)$, $\varphi(t)$, а также от параметра n .

Функция $\psi(t)$ определяет закон движения центра поднятия (при $x = 0$) и амплитуду поднятия вершины ее графика. Если рассматривается поднятие, то $\psi(t) > 0$ и, наоборот, если опускание, то $\psi(t) < 0$.

Из формулы (1) следует, что нулевое значение функции $Z_a(x, t)$ достигается в двух симметрично расположенных относительно ординаты точках $-x_0$ и $+x_0$:

$$x_0 = \frac{[1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)]^n}{\sqrt{2 \cdot \varphi(t)}} \quad (4)$$

Отсюда видно, что точки $x = \pm x_0$ являются «подвижными», т.е. они зависят от значения функции $\varphi(t)$. Чем меньше значение $\varphi(t)$, тем больше значение x_0 и, наоборот. Это означает, что функция $\varphi(t)$ характеризует «ширину» графика функции $Z_a(x, t)$ в горизонтальном направлении.

Вышесказанное означает, что между функциями $\psi(t)$ и $\varphi(t)$ существует определенная связь, которая должна быть определена из динамических условий задачи о гидродинамической неустойчивости сильновязких жидкостей, когда нижний слой имеет меньшую плотность, чем плотность вышележащего слоя.

4 НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИИ $Z_a(x, t)$ ДЛЯ СЛУЧАЯ $n = 1$

Пусть параметр $n = 1$. В этом случае первая функция $Z_a(x,t)$ из семейства (3) будет иметь следующий вид

$$Z_a(x,t) = \psi(t) \cdot \exp[-\varphi(t) \cdot x^2] \cdot [1 - 2 \cdot \varphi(t) \cdot x^2]. \quad (5)$$

Первая частная производная этой функции по времени t будет определена в виде:

$$\frac{\partial Z_a}{\partial t} = \exp[-\varphi(t) \cdot x^2] \cdot \{\psi'(t) - \psi(t) \cdot \varphi'(t) \cdot x^2\} \cdot [1 - 2 \cdot \varphi(t) \cdot x^2] - 2 \cdot \psi(t) \cdot \varphi'(t) \cdot x^2 \quad (6)$$

Теперь необходимо найти ее первую и вторую производные по x :

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z_a}{\partial x} &= 2 \cdot \psi(t) \cdot \varphi(t) \cdot \exp[-\varphi(t) \cdot x^2] \cdot [2 \cdot \varphi(t) \cdot x^2 - 3 \cdot x]; \\ \frac{\partial^2 Z_a}{\partial x^2} &= 2 \cdot \psi(t) \cdot \varphi(t) \cdot \exp[-\varphi(t) \cdot x^2] \cdot [-4 \cdot \varphi^2(t) \cdot x^4 + \varphi(t) \cdot x^2 - 3]. \end{aligned} \quad (7)$$

Можно показать, что данная функция $Z_a(x,t)$ удовлетворяет перечисленным ниже свойствам.

Свойство 1. В точке $x_1 = 0$ достигается максимум функции $Z_a(x,t)$. Здесь ее максимальное значение равно

$$\max Z_a(0,t) = \psi(t).$$

Действительно, условия максимума в этой точке выполняются. На самом деле, в этой точке первая ее производная по x равна нулю (необходимое условие), а вторая производная имеет отрицательное значение, если $\psi(t) > 0$ (достаточное условие).

Свойство 2. Аналогично можно показать, что в точках $x_{2,3} = \pm \sqrt{1,5 \cdot \varphi(t)}$ достигается минимум функции $\min Z_a(x,t) = 0,431 \cdot \psi(t)$.

Свойство 3. Функция $Z_a(x,t)$ имеет нулевое значение в двух точках:

$$x_{4,5} = \pm \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \varphi(t)}} \approx \pm \frac{0,71}{\sqrt{\varphi(t)}}.$$

Свойство 4. Функция $Z_a(x,t)$ имеет четыре точки перегиба:

$$x_{6,7} = \pm \sqrt{\frac{3 + \sqrt{6}}{2 \cdot \varphi(t)}} \approx \pm \frac{1,65}{\sqrt{\varphi(t)}}; \quad x_{8,9} = \pm \sqrt{\frac{3 - \sqrt{6}}{2 \cdot \varphi(t)}} \approx \pm \frac{0,5246}{\sqrt{\varphi(t)}}.$$

Итак, график функции характеризуется девятью точками. Координаты этих точек зависят от времени t и значения их изменяются одновременно с течением времени (рисунок).

5 АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

На основе анализа результатов исследований Рамберга [17] и Ховарда [18] был получен вид функции $Z_a(x,t)$, которая достаточно близко описывает границу между поднимающимися (легкими) веществами и более тяжелыми вышележащими веществами. Однако результаты этих исследований не могут учитывать динамику процесса, поэтому переменная t в функции $Z_a(x,t)$ играла роль некоторого параметра. При этом зависимость данной функции от времени в явном виде не определена. Вследствие этого функция $Z_a(x,t)$ определена в зависимости от неизвестных функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$. Эти функции могут определить динамику рассматриваемого процесса, однако из имеющейся в литературе информации нельзя судить о характере этих функций. Для определения неизвестных функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ требуется поставить и решить задачу о гидродинамической устойчивости в двухслойной сильновязкой жидкости, когда плотность нижнего слоя меньше плотность верхнего слоя.

Пусть рассматривается два слоя сильновязкой жидкости, для которой числа Рейнольдса будут малыми. Предполагается, что плотность нижнего слоя ρ_1 меньше, чем плотность верхнего слоя ρ_2 . Верхняя поверхность верхнего слоя считается свободной, а дно (основание) нижнего слоя неподвижной поверхностью. На граничной между слоями поверхности выполняются условия непрерывности и равенства скорости движения.

Для этих слоев предполагается допущение «мелкой воды», когда амплитуды локальных под-нятий и опусканий границ слоев соизмеримы со средними их толщинами (вертикальными размерами) и они малы в сравнении с горизонтальными размерами. Любое нарушение равновесного состояния на границе между слоями является причиной движения в слоях. Движение в этих слоях происходит под действием разности плотностей слоев. В работе [22] была получена система дифференциальных уравнений для определения граничных поверхностей: $z = \xi_1(x,t)$ – граница между слоями; $z = \xi_2(x,t)$ – свободная поверхность верхнего слоя. Она представляет

собой систему двух частных дифференциальных уравнений второго порядка параболического типа:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_1}{\partial t} &= -a_1^2 \cdot \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x^2} + a_3^2 \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial t} &= -\frac{a_1^2}{2} \cdot (3h_2 - h_1) \cdot \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x^2} + a_2^2 \cdot \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь введены следующие обозначения постоянных величин:

$$\begin{aligned} a_1^2 &= \frac{ER}{3} \cdot \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} \cdot h_1^3, \\ a_2^2 &= \frac{ER}{3} \cdot \frac{\rho_2}{\rho_1} \cdot [h_2^3 + (h_2 - h_1)^3 \cdot (\frac{\eta_1}{\eta_2} - 1)], \\ a_3^2 &= \frac{ER}{6} \cdot \frac{\rho_2}{\rho_1} \cdot (3h_2 - h_1) \cdot h_1^2. \end{aligned}$$

В этой формуле h_1 – безразмерная первоначальная мощность (толщина) нижнего слоя; $h_2 - h_1$ – толщина верхнего слоя; η_1, η_2 – соответственно динамические коэффициенты вязкости нижнего и верхнего слоев; $ER = \frac{\rho_1 g H^3}{\eta_1 U L}$ – безразмерный параметр (число Ержанова); U, H, L – принятые характерные величины: соответственно скорость, толщина и горизонтальный размер; g – ускорение силы тяжести.

В этой же работе предложено аналитическое решение данной системы уравнений, которое имеет следующий вид:

$$\xi_1(x, t) = \frac{A}{\sqrt{(B^2 - 4 \cdot a^2 \cdot t)^3}} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{B^2 - 4 \cdot a^2 \cdot t}\right) \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot x^2}{B^2 - 4 \cdot a^2 \cdot t}\right). \quad (9)$$

В данной формуле a^2 – постоянный параметр, зависящий от свойств рассматриваемых слоев сильновязкой жидкости. Он определен с помощью следующей формулы [22]:

$$a^2 = \frac{a_1^2 - a_2^2 + \sqrt{(a_1^2 + a_2^2)^2 - 2a_1^2 a_3^2 (3h_2 - h_1)}}{2}, \quad (10)$$

Данное решение записано в общем виде; оно зависит от неизвестных постоянных интегрирования A и B . Нетрудно убедиться в том, что функция (9) удовлетворяет всем свойствам функции $Z_a(x, t)$, приведенным в

предыдущем пункте. Поэтому с точностью до постоянной величины может быть написано следующее равенство: $Z_a(x,t) = \xi_1(x,t)$.

Выполнение этого равенства позволяет определить функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$:

$$\varphi(t) = \frac{1}{B^2 - 4 \cdot a^2 \cdot t}, \quad \psi(t) = \frac{A}{\sqrt{(B^2 - 4 \cdot a^2 \cdot t)^3}}. \quad (11)$$

Итак, получено решение задачи об определении вида функции, описывающей поднятие легких мантийных веществ под действием разности плотностей, возникающей из-за большой температуры в нижней мантии.

Из анализа полученного решения задачи вытекают следующие выводы:

1. При увеличении относительной разности плотностей рассматриваемых слоев $\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1}$ подни-мающиеся вверх вещества нижнего слоя будет активно влиять на движение верхнего слоя и спо-собствует поднятию свободной поверхности верхнего слоя. В зависимости от значений этой вели-чины амплитуда поднятия свободной поверхности составляет примерно от 3 до 10% амплитуды граничной между слоями поверхности.

2. При увеличении отношения динамического коэффициента вязкости нижнего слоя к динами-ческому коэффициенту верхнего слоя $\frac{\eta_1}{\eta_2}$ (при малой вязкости верхнего слоя) вещества верхнего слоя успевают растекаться в горизонтальном направлении и свободная поверхность этого слоя изменится незначительно.

3. Полученная функция $Z_a(x,t) = \xi_1(x,t)$ определяет закономерность локальных поднятий подас-теносфрной границы как следствие подъема мантийных веществ из глубинных недр Земли в «начальный период» мантийного диапиризма.

Выводы:

В данной работе осуществлено решение проблемы, связанной с определением процесса изме-нения верхней границы восходящего мантийного потока под воздействием разницы плотностей, приведшей к гидродинамической неустойчивости в астеносферном слое Земли. Из анализа инфор-мации, имеющейся в геологической и геофизической литературе [1-18], определены основные свойства функции $Z_a(x,t)$, описывающей рассматриваемый процесс. Аналитическое решение математической задачи,

полученной при механико-математическом моделировании, позволило получить функцию, свойства которой полностью соответствуют физической сущности рассматриваемого процесса гидродинамической неустойчивости в двухслойной сильновязкой жидкости. Функция $Z_a(x,t)$, полученная в результате аналитического решения данной задачи, достаточно хорошо согласуется с результатами, опубликованными в работах [17, 18].

Практическая ценность полученной здесь функции заключается в том, что она достаточно хорошо описывает кинематику процесса появления и эволюции соляных куполов или мантийного диапиризма. Использование такой функции может быть полезным при изучении динамики подобных процессов. Функция может быть использована для описания как отдельного локального купола, так и для описания восходящего мантийного потока под рифтами или срединно-океаническими хребтами. Возможность определения данной функции по некоторым характерным точкам облегчает измерение современных движений земной коры в областях поднятия или опускания земной поверхности. Предложенная функция будет полезной для аппроксимации результатов наблюдений или экспериментальных данных при исследовании явления гидродинамической неустойчивости. Она может быть также использована для объяснения механизма поднятия соляных куполов.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Хаин В.Е. Основные проблемы современной геологии. – М.: Научный мир, 2003. – 348 с.
- 2 Белоусов В.В. Тектоносфера Земли: взаимодействие верхней мантии и коры. – М.: Недра, 1991. – 428 с.
- 3 Добрецов Н.Л., Кирдяшкин А.Г., Кирдяшкин А.А. Глубинная геодинамика. – Новосибирск, 2001. – 409 с.
- 4 Ержанов Ж.С. Теория ползучести горных пород и ее приложения. – Алма-Ата: Наука, 1964. – 200 с.
- 5 Кропоткин П.Н. Тектонические напряжения в земной коре // Геотектоника. – 1996. – № 2. – С. 9-42.
- 6 Пущаровский Ю.М., Меланхолина Е.Н. Тектоническое развитие Земли. Тихий океан и его обрамление. – М.: Наука, 1992. – 263 с.
- 7 Тычков С.А., Василевский А.Н., Рычкова Е.В. Эволюция плюма под континентальной литосферой с резкими вариациями толщины // Геология и геофизика. – 1999. – Т. 40, № 8. – С. 1182-1196.
- 8 Харбух Дж., Бонэм-Картер Г. Моделирование на ЭВМ в геологии. – М.: Мир, 1974. – 319 с.
- 9 Рамберг Х. Сила тяжести и деформации в земной коре. – М.: Недра, 1985. – 399 с.

10 Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. – М.: Наука, 1972. – 416 с.

11 Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 736 с.

12 Ладыженская С.А., Солонникова В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.

13 Куралбаев З.К. Модельное исследование влияния локального поднятия мантийных веществ на тектоносферу // Научный вестник Новосибирского государственного технического университета. – 2005. – № 1(19). – С. 37-49.

14 Куралбаев З.К. Проблемы механико-математического моделирования тектонических процессов в периферийных слоях Земли // Механика и машиноведение. – 2007. – № 1. – С. 67-72.

REFERENCES

1 Walcott R.J. Flexural rigidity, thickness and viscosity of the lithosphere // Journal of Geophysical Research. – 1970b. – Vol. 75. – P. 3941-3954.

2 Ranalli G. Viscosity of the asthenosphere // Nature (Gr. Br.). – 1993. – Vol. 361, N 6409. – P. 211.

3 Bills Bruce G., Gurrey Donald R., Marshall Grant A. Viscosity estimates for the crust and upper mantle from patterns of lacustrine shoreline deformation in the Eastern Great Basin // Journal of Geophysical Research, B. – 1994, 99. – Vol. 11. – P. 46-58.

4 De Bremacher J-C. Is the oceanic lithosphere elastic or viscous // Journal of Geophysical Research. – 1977. – Vol. 82, N 14. – P. 234-245.

5 Harper J.F. Asthenosphere flow and plate motion // Geophysical Roy. Astron. Soc. – 1978. – Vol. 5, N 1. – P. 123-134.

6 Manglik A., Gliko A.O., Singh R.N. Movement of the lithosphere-asthenosphere interface in response to erosion of thickened continental lithosphere: a moving boundary approach // Geophysical Journal Int. – 1995. – Vol. 122. – P. 479-488.

7 Lopez David E. Mantle plumes // Tectonophysics. – 1991. – Vol. 187, N 4. – P. 373-384.

8 Nakado Masao, Takeda Yoshitaka. Roles of mantle diapir and ductile lower crust on island-arc tectonics // Tectonophysics – 1995. – Vol. 246. – P. 1-3.

9 Nalpas T., Brem J.P. Salt flowered diapirism related to extension at crystal scale // Tectonophysics. – 1993. – Vol. 228. – P.3-4.

Резюме

З. К. Құралбаев, А. А. Тәуірбекова

(Алматы энергетика және байланыс университеті, Алматы қ.)

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МАНТИЙНОГО ДИАПИРИЗМА

Төменгі мантиядан жергілікті көтерілімдер жерімен қыздырылған мантиялық заттардың Жердің сыртқы қабатында жүріп жатқан геофизикалық және геологиялық мәліметтерінің тектоникалық үдерістері туралы талдау жасалған. Төменгі мантиялар мен астеносфералық қабаттың жоғары жағында орналасқан заттардың тығыздығының әртүрлі екені туралы болжамдар пайдаланылған. Бұл жерде осы үдеріс геодинамикалық тұрақсыз үдеріс ретінде қарастырылған. Бұл үдерісті сипаттау үшін Рейнольдстың саны аз тұтқырлығы жоғары сұйықтықтың физикалық үлгісі пайдаланылған. Мантиялық және тұзды диапиризм туралы әдебиеттерде келтірілген мәліметтерді негізге ала отырып жоғары және төмен орналасқан тығыздығы әртүрлі қабаттардың ортасынан мантиялық заттардың көтерілу үдерісінің механикалық-математикалық үлгісі ұсынылған. Мантиялық диапиризм үдерісін механикалық-математикалық үлгілеу нәтижесінде математикалық есептің талданған шешімі алынды. Талданған шешімнен алынған нәтижелерді салыстыру тұзды күмбездерде жүргізілген тәжірибелер мен бақылауларға өте сәтке келетінін көрсетті.

Кілт сөздер: мантиялық заттар, үлгі, диапиризм.

Summary

Z. K. Kuralbayev, A. A. Taurbekova

(Almaty University of Power Engineering & Telecommunications)

MECHANICAL-MATHEMATICAL MODELING OF MANTLE DIAPIRISM

The analysis of geophysical and geological data on the tectonic processes occurring in the peripheral layers of the Earth, under the influence of local elevations of heated mantle material from the lower mantle. The assumption was that there is a difference in density of substances originating from the lower mantle and the overlying asthenosphere layer materials. Here, this process is considered as the process of hydrodynamic instability. For a description of the process used by the physical model high-viscosity liquids at low Reynolds numbers. Based on the analysis of published data on the mantle and salt diapirism, offered Mechanics and mathematical model of mantle uplift substances because the density difference between the overlying and underlying layers. As a result, mechanical-mathematical modeling of mantle diapirism to obtain an analytic solution of a mathematical problem. Comparison of the analytical solution results shows good agreement with the data obtained from the experiments and observations of the salt domes.

Keywords: mantle material, model, diapirism.

Поступила 3.04.2013г.