З. К. КУРАЛБАЕВ, А. А. ЕРЖАН

(Алматинский университет энергетики и связи, г. Алматы)

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ О ПЕРЕХОДНОМ ПРОЦЕССЕ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ

Аннотация

В радиотехнических системах часто возникают задачи о переходных процессах в электрических цепях, решение которых имеет важное теоретическое и практическое значение. Данная статья посвящена решению одной из таких задач. Рассмотрен частный случай задачи и получено аналитическое решение.

Ключевые слова: радиотехнические системы, переходный процесс, электрическая цепь, теория цепей.

Кілт сөздер: радиотехникалық жүйелер, өтпелі үдеріс, электр тізбегі, тізбектер теориясы.

Keywords: radio systems, the transition process, the electrical circuit, circuit theory.

Введение. Анализ схемы, цель которого состоит в получении реакции схемы на возбуждение известным сигналом, является одной из важных задач в теории цепей [1]. В общем случае, когда изучается поведение любой динамической системы в любой промежуток времени должна рассматриваться задача о переходном процессе. В данном случае в качестве динамической системы рассматривается электронная схема, подключенная в некоторый момент к источнику тока или напряжения [2]. Подобную задачу приходится решать часто в радиотехнических системах [1].

В работе [3] была рассмотрена задача о переходном процессе, происходящем в электрической цепи под воздействием возбуждающего источника тока, имеющего синусоидальный закон изме-нения. В качестве примера использована простая RC-схема. С целью обобщения этой задачи для общего случая в данной статье рассматривается решение одной задачи о переходных процессах известным классическим методом.

Известно, «… что переходные процессы во многих устройствах и системах связи являются составной «нормальной» частью режима их работы» [1]. Любые изменения в электрической цепи являются причиной возникновения переходных процессов, так как установившийся режим в цепи не достигается мгновенно. Изучение переходных процессов в цепи является одной из важных проблем в связи с тем, что переходные процессы могут привести к известным нежелательным явлениям [1].

Существуют различные методы анализа переходных процессов в электрической цепи [1, 2]. Для анализа удобным является классический метод расчета переходных процессов. Этот метод использует математическую модель переходного процесса, которая приводит к постановке задачи Коши для дифференциальных уравнений. В данной статье рассматривается решение одной задачи о переходных процессах в электрической цепи классическим методом.

Постановка задачи. Пусть рассматривается следующая RC-схема (рисунок 1). Математи-ческая модель данной цепи описана с помощью следующих дифференциальных уравнений [3]:

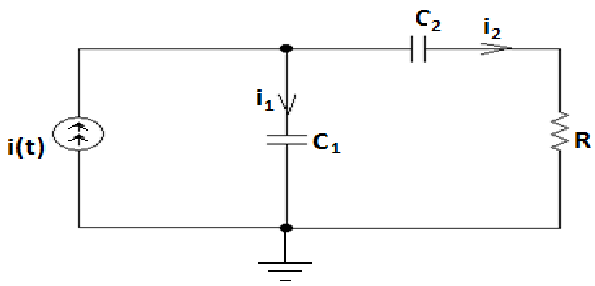

Рисунок 1 – Линейная RC-цепь

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= \frac{u_2-u_1}{RC_1}+\frac{i(t)}{C_1}; \\ \frac{du_2}{dt} &= \frac{u_1-u_2}{RC_2}, \end{aligned} \qquad (1)$$

где R – сопротивление резистора; C_1 и C_2 – емкости конденсаторов; $u_1(t)$ и $u_2(t)$ – напряжения на конденсаторах; $i(t)$ – ток на источнике; t – время.

Величины C_1, C_2 и R в формулах (1) являются постоянными величинами, не зависящими от времени t. Функция $i(t)$ задана в $t\in[0,\infty)$ и удовлетворяет условиям Дирихле [4], а функции $u_1(t)$ и $u_2(t)$ являются искомыми функциями.

По второму закону коммутации [1] в начальный момент времени t=0 напряжения на емкостях имеют те же значения, что и в момент t=0 до коммутации. Этот факт позволяет задавать начальные условия в момент t=0 для решения дифференциальных уравнений (1):

$$t=0; \quad u_1(0)=0; \quad u_2(0)=0. \qquad (2)$$

Теперь может быть сформулирована математическая задача, в которой требуется решить систему дифференциальных уравнений первого порядка (1) при начальных условиях (2). Она является задачей Коши для системы двух дифференциальных уравнений первого порядка.

Аналитическое решение задачи Коши (1)–(2) рассмотрено в работе [3]. Оно может быть записано в следующем виде:

$$u_1(t) = u_2(t) + e^{-\alpha t}\ Z(t),$$
$$u_2(t) = \frac{1}{\tau_2}\int_0^t e^{-\alpha x} Z(x)dx. \qquad (3)$$

В данных формулах введены следующие обозначения:

$$Z(t) = \frac{1}{C_1}\int_0^t i(x)\, e^{\alpha x}\ dx, \quad (4)$$

$$\tau_1 = RC_1, \quad \tau_2 = RC_2; \quad \alpha = \frac{C_1 + C_2}{RC_1C_2} = \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2};$$

В этих формулах τ_1 и τ_2 – постоянные величины; они называются постоянными временами конденсаторов.

Полученное решение (3) данной задачи зависит от функции *i(t).* Здесь было сделано допущение о том, что функция *i(t)* удовлетворяет условиям Дирихле [3]. Тогда, согласно теореме Дирихле, она может быть разложена в ряд Фурье. Предполагается, что функция *i(t)*, определенная в промежутке (0, *T*), а затем при остальных значениях *t* изменяется по закону периодичности с периодом *T.*

В данном случае функция *i(t)* может быть представлена как сумма следующего ряда Фурье [4]:

$$i(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cdot \cos\frac{2k\pi t}{T} + b_k \cdot \sin\frac{2k\pi t}{T}) \qquad (5)$$

Коэффициенты ряда a_k и b_k определяются с помощью формул [4] :

$$a_0 = \frac{2}{T}\cdot\int_0^T i(t)dt,$$

$$a_k = \frac{2}{T}\cdot\int_0^T i(t)\cdot\cos\frac{2k\pi t}{T}dt, \qquad (6)$$

$$b_k = \frac{2}{T}\cdot\int_0^T i(t)\cdot\sin\frac{2k\pi t}{T}dt,$$

где $k = 1,2,3,....$.

В дальнейших вычислениях потребуются значения интегралов, получаемых после подстановки формулы (5) в формулу (4):

$$Z(t)=\frac{1}{C_1}\cdot\left[Q_0+\sum_{k=1}^{\infty}Q_k+\sum_{k=1}^{\infty}G_k\right], \tag{7}$$

где

$$\begin{cases} Q_0=\dfrac{a_0}{2}\cdot\displaystyle\int_0^t \exp(\alpha x)dx= \dfrac{a_0}{2\alpha}[\exp(\alpha t)-1], \\ Q_k=a_k\cdot\displaystyle\int_0^t \exp(\alpha x)\cdot\cos\dfrac{2k\pi x}{T}dx, \\ G_k=b_k\cdot\displaystyle\int_0^t \exp(\alpha x)\cdot\sin\dfrac{2k\pi x}{T}dx, \quad k=1,2,3,.... \end{cases} \tag{8}$$

Вычисление интегралов (8) не представляет особых трудностей, и они могут быть представ-лены в виде следующих формул:

$$Q_k=a_k\cdot\frac{T^2\cdot\alpha}{(2k\pi)^2+(\alpha T)^2}\cdot\left[\frac{2k\pi\cdot\exp(\alpha t)}{\alpha\cdot T}\cdot\sin(\frac{2k\pi t}{T})-1+\exp(\alpha t)\cdot\cos(\frac{2k\pi t}{T})\right]$$

$$G_k=b_k\cdot\frac{T^2\cdot\alpha}{(2k\pi)^2+(\alpha T)^2}\cdot\left[\exp(\alpha t)\cdot\sin\frac{2k\pi t}{T}+\frac{2k\pi}{\alpha\cdot T}\cdot(1-\exp(\alpha t)\cdot\cos\frac{2k\pi t}{T})\right], \tag{9}$$

где $k=1,2,3,....$

Теперь можно определить искомые функции $u^1(t)$ и $u^2(t)$. Для этого необходимо вначале вычислить интеграл, используя вторую формулу (3):

$$u_2(t)=\frac{1}{\tau_2\cdot C_1}\cdot\int_0^t \exp(-\alpha x)\,[Q_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}(Q_k+G_k)]dx \tag{10}$$

Подставив формулы (9) в (10), а затем вычислив интегралы, можно получить искомую функцию $u_2(t)$:

$$\begin{aligned} u_2(t)=\Bigg\{&\frac{a_0}{2\alpha}[t+\frac{1}{\alpha}\exp(-\alpha t)-\frac{1}{\alpha}]+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha T^2}{(2k\pi)^2+(\alpha T)^2}[(\frac{a_k}{\alpha}+\frac{Tb_k}{2k\pi})(1-\cos\frac{2k\pi t}{T})+ \\ &+(\frac{Ta_k}{2k\pi}-\frac{b_k}{\alpha})\sin\frac{2k\pi t}{T}+(\frac{a_k}{\alpha}-\frac{2k\pi}{T\alpha^2}b_k)(\exp(-\alpha t)-1)]\Bigg\}\frac{1}{\tau_2 C_1}. \end{aligned} \tag{11}$$

Функция $u_1(t)$ определяется по первой формуле (3):

$$u_1(t) = u_2(t) + \left\{ \frac{a_0}{2\alpha} \cdot (1 - \exp(-\alpha t)) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{T^2\alpha}{(2k\pi)^2 + (\alpha T)^2} \cdot \left[\left(\frac{2k\pi}{\alpha T} \cdot a_k + b_k\right) \cdot \right.\right.$$
$$\left.\left. \cdot \sin\frac{2k\pi t}{T} + \left(a_k - \frac{2k\pi}{\alpha T} \cdot b_k\right) \cdot \cos\frac{2k\pi t}{T} + \exp(-\alpha t) \cdot \left(\frac{2k\pi}{\alpha T} \cdot b_k - a_k\right) \right] \right\} \cdot \frac{1}{C_1} \qquad (12)$$

Итак, решена поставленная математическая задача (1) и (2) и найдены формулы (11) и (12) для определения искомых функций $u_1(t)$ и $u_2(t)$ в зависимости от функции $i(t)$. Теперь требуется определить функции $i_1(t)$ и $i_2(t)$, которые описывают изменение токов в цепи в зависимости от времени t. Для определения их используются следующие известные формулы [1, 2]:

$$i_2(t) = C_2 \frac{du_2}{dt};\ i_1(t) = i(t) - i_2(t). \qquad (13)$$

Определив первую производную функции $u_2(t)$ из формулы (11) и подставляя ее в первую формулу (13), можно получить формулу для определения функции $i_2(t)$:

$$i_2(t) = \frac{C_2}{\tau_2 \cdot C_1} \cdot \left\{ \frac{a_0}{2 \cdot \alpha} \cdot (1 - \exp(-\alpha t)) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{T^2 \cdot \alpha}{(2k\pi)^2 + (\alpha T)^2} \cdot \left[\left(\frac{2k\pi}{T\alpha} \cdot a_k + b_k\right) \cdot \right.\right.$$
$$\left.\left. \cdot \sin\frac{2k\pi}{T} + \left(a_k - \frac{2k\pi}{T \cdot \alpha} \cdot b_k\right) \cdot \left(\cos\frac{2k\pi t}{T} - \exp(-\alpha t)\right) \right] \right\}. \qquad (14)$$

Функция $i_1(t)$ определяется из второй формулы (13).

Частный случай. Пусть теперь предполагается, что $i(t)$ является сигналом, поступающим в цепь и является причиной переходного процесса.

В литературе, посвященной анализу и расчету электрических цепей [1, 2], приведены различ-ные типы наиболее распространенных на практике сигналов. В данной статье рассматривается частный случай поставленной в ней задачи, когда сигнал $i(t)$ задан в виде периодической формы (рисунок 2).

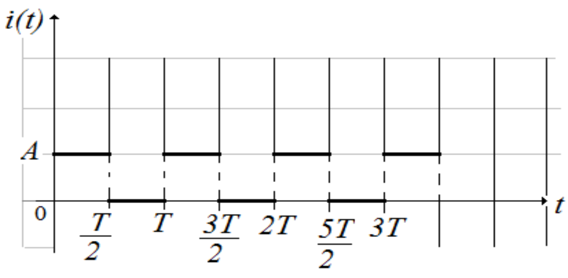

Рисунок 2 – Сигнал периодической формы

Формула, определяющая сигнал, приведенный на рисунке 2, записывается в следующем виде:

$$i(t) = \begin{cases} A \quad при \quad 0 \langle\, t \,\langle\, \dfrac{T}{2}, \\ 0 \quad при \quad \dfrac{T}{2} \,\langle\, t \,\langle\, T\,. \end{cases} \tag{15}$$

Разложение данной функции $i(t)$ в ряд Фурье

$$i(t) = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi}\left(\frac{\sin\frac{2\pi t}{T}}{1} + \frac{\sin\frac{6\pi t}{T}}{3} + \frac{\sin\frac{10\pi t}{T}}{5} + \ldots\right), \tag{16}$$

Коэффициенты этого ряда определены из формул (6):

$$a_0 = A; \quad a_k = 0; \quad b_k = \frac{A}{k\pi}\left[1-(-1)^k\right];$$

где $k = 1,2,3,\ldots.$

В этом частном случае искомые функции будут определены:

$$u_2(t) = \frac{1}{\tau_2 C_1}\cdot\left\{\frac{A}{2\alpha}\left(t + \frac{1}{\alpha}\exp(-\alpha t) - \frac{1}{\alpha}\right) + \frac{AT^2\alpha}{\pi}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left[1-(-1)^k\right]}{k\left[(2k\pi)^2 + (\alpha T)^2\right]}\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\left[1 - \cos\frac{2k\pi t}{T} - \frac{1}{\alpha}\sin\frac{2k\pi t}{T} + \frac{2k\pi}{\alpha^2 T}\cdot(1 - \exp(-\alpha t)\right]\right\},$$

$$u_1(t) = u_2(t) + \frac{1}{C_1}\left\{\frac{A}{2\alpha}(1 - \exp(-\alpha t)) + \frac{AT^2\alpha}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left[1-(-1)^k\right]}{k\left[(2k\pi)^2 + (\alpha T)^2\right]}\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\left[\sin\frac{2k\pi t}{T} - \frac{2k\pi}{\alpha T}\left(\cos\frac{2k\pi t}{T} - \exp(-\alpha t)\right)\right]\right\};$$

$$i_2(t) = \frac{C_2}{\tau_2 C_1}\cdot\left\{\frac{A}{2\alpha}(1 - \exp(-\alpha t) + \frac{AT^2\alpha}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left[1-(-1)^k\right]}{k\left[(2k\pi)^2 + (\alpha T)^2\right]}\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\left[\sin\frac{2k\pi t}{T} - \frac{2k\pi}{T\alpha}\left(\cos\frac{2k\pi t}{T} - \exp(-\alpha t)\right)\right]\right\}$$

$$i_1(t) = i(t) - i_2(t);$$

Для определения установившегося режима необходимо определить значения $i_2(t)$ при $t \to \infty$:

$$\lim_{t\to\infty} i_2(t) = \frac{C_2}{\tau_2 C_1}\cdot\left\{\frac{A}{2\alpha}(1-\exp(-\alpha t) + \frac{AT^2\alpha}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left[1-(-1)^k\right]}{k\left[(2k\pi)^2+(\alpha T)^2\right]}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left[(\sin\frac{2k\pi t}{T} - \frac{2k\pi}{T\alpha}\cdot\cos\frac{2k\pi t}{T})\right]\right\} =$$

$$= \frac{C_2}{\tau_2 C_1}\cdot\left\{\frac{A}{2\alpha} + \frac{AT^2\alpha}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left[1-(-1)^k\right]\sqrt{1+(\frac{2k\pi}{\alpha T})^2}}{k\left[(2k\pi)^2+(\alpha T)^2\right]}\cdot\sin(\frac{2k\pi t}{T}-\varphi_k)\right\},$$

где $\varphi_k = arctg\dfrac{2k\pi}{T\alpha};$

В установившемся режиме ток $i_2(t) = i_2^0(t)$:

$$i_2^0(t) = \frac{C_2}{\tau_2 C_1}\left[\frac{A}{2\alpha} + \frac{AT}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left[1-(-1)^k\right]\cdot\sin(\frac{2k\pi t}{T}-\varphi^k)}{k\sqrt{(2k\pi)^2+(\alpha T)^2}}\right]$$

$$i_1^0(t) = \frac{A}{2}(1-\frac{C_2}{\tau_2 C_1}) + \frac{A}{\pi}\left[\sum_{k=1}^{\infty}(2\sin\frac{2k\pi t}{T} - \frac{\sin(\frac{2k\pi t}{T}-\varphi_k)}{\sqrt{(2k\pi)^2+(\alpha T)^2}})\cdot\frac{\left[1-(-1)^k\right]}{k}\right]$$

Итак, получены аналитические формулы для искомых величин напряжений и токов в цепи.

Выводы:

1. Поставлена и решена математическая задача о переходном процессе в электрической RC-цепи. Аналитическое решение задачи получено в виде рядов Фурье.

2. Рассмотрен частный случай, когда возбуждающий ток является сигналом периодической формы с заданным периодом *T*.

3. Дано теоретическое определение установившегося режима рассматриваемой в электрической цепи; получены формулы для искомых функций $i_1^0(t)$ и $i_2^0(t)$ в установившемся режиме.

ЛИТЕРАТУРА

1 Бакалов В.П., Дмитриков В.Ф., Крук Б.Е. Основы теории цепей: Учебник для вузов / Под ред. В. П. Бакалова. – 2-е изд. перераб. и доп. – М.: Радио и связь, 2000. – 592 с.

2 Фидлер Дж.К., Найтингейл К. Машинное проектирование электронных схем / Пер. с англ. под ред. Г. Г. Казеннова. – М.: Высш. шк., 1985. – 216 с.

3 Куралбаев З.К., Ержан А.А. Анализ непрерывного процесса в линейной электронной цепи // Вестник ЕНУ им. Л. Н. Гумилева. – 2012. – № 6. – С. 183-188.

4 Смирнов В.И. Курс высшей математики. – Т. 2. – М.: Наука, 1974. – 656 с.

REFERENCES

1 Bakalov V.P., Dmitrikov V.F., Kruk B.E. Radio i svjaz, **2000**, 592 (in Russ.).

2 Computer aided circuit design / J. K. Fidler, C. Nightingate. **1985**, 216 (in Russ.).

3 Kuralbayev Z.K., Yerzhan A.A. Vestnik ENU im. L.N. Gumilyeva. – **2012**, № 6. 183-188 (in Russ.).

4 Smirnov V.I. T.2. Nauka, **1974**, 656 (in Russ.).

Резюме

З. К. Құралбаев, А. А. Ержан

(Алматы энергетика және байланыс университеті)

ЭЛЕКТРЛІК ТІЗБЕКТЕГІ ӨТПЕЛІ ҮДЕРІС ТУРАЛЫ

БІР ЕСЕПТІ ШЕШУ

Электрлік тізбектердегі өтпелі үдерістер туралы есептер радиотехникалық жүйелерде жиі кездеседі. Оларды шешудің теориялық және практикалық маңызы өзекті. Ұсынылып отырған мақала осы есептердің бірін шешуге арналған. Есептің жеке жағдайы қарастырылып, талдау шешімі анықталған.

Кілт сөздер: радиотехникалық жүйелер, өтпелі үдеріс, электр тізбегі, тізбектер теориясы.

Summary

Z. K. Kuralbayev, A. A. Yerzhan

(Almaty University of Power Engineering & Telecommunications)

ON THE SOLUTION OF A PROBLEM OF THE TRANSITION PROCESS IN THE ELECTRICAL CIRCUIT

In radio engineering systems often arises the problem of transients in electrical circuits, the solution of which has important theoretical and practical significance. This article is devoted to the solution of one of these problems. A special case of the problem is considered and the analytical solution is obtained.

Keywords: radio systems, the transition process, the electrical circuit, circuit theory.

Поступила 7.02.2013г.