Л. Т. КУРБАНАЛИЕВ, М. А. МУСАХАНОВА

АЛГОРИТМ МЕТОДА ПОТЕНЦИАЛОВ В ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Рассмотрена задача об упругом колебании поверхностного слоя грунта. Слои грунта описывались по модели Григоряна. Для решения поставленной задачи применен метод потенциалов. Получены выражения для вычисления компонент деформации и напряжения в упругом случае

Рассмотрена задача о колебании упругого поверхностного слоя грунта [1,2]. Состояние грунта описывается моделью Григоряна [1]. Предположим, что на подошву слоя падает одномерная поперечная упругая волна (рис. 1). Будем учитывать отражение и преломление поперечной волны от границ слоев (рис. 2).

Граничные условия:

$$u_e = u_p,\ \tau_e = \tau_p \text{ при } y = 0;$$

$$\tau = 0 \text{ при } y = H. \qquad (1)$$

Начальные условия:

$$\tau = u = 0 \text{ при } t = 0. \qquad (2)$$

Потенциал падающей волны представим в виде:

$$\Psi_0 = B_0 f\left(\frac{b_0 t}{H} - \frac{y}{H}\right). \qquad (3)$$

Тогда потенциалы отраженных и переломных волн можно представить в виде:

$$\Psi_e = B_e\ f\left(\frac{b_0 t}{H} + \frac{y}{H}\right),$$

$$\Psi_p = B_p f\left(\frac{b_1 t}{H} - \frac{y}{H}\right), \qquad (4)$$

где b_0, b, b_1 – скорости падающей, отраженных и преломленных поперечных волн соответственно; B_0, B, B_p – амплитуды падающей, отраженных и преломленных поперечных волн; Ψ_0, Ψ, Ψ_p –

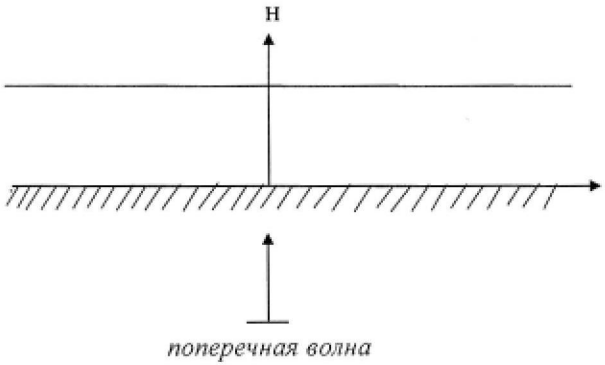

Рис. 1. Падающая упругая одномерная перечная волна

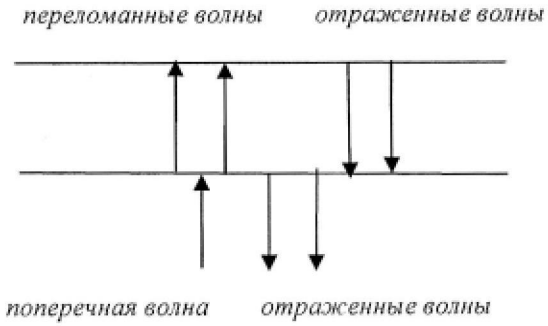

Рис. 2. Схематическое изображение волн

потенциалы падающей, отраженных и преломленных поперечных волн.

В работе [2] приводятся выражения для поперечных и продольных волн:

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial y}, \qquad v = \frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\phi}{\partial x}. \qquad (5)$$

Из соотношения получим:

$$u_0 = \frac{\partial\phi_0}{\partial y}, \quad u_e = \frac{\partial\phi_e}{\partial y},$$

$$u_p = \frac{\partial\phi_p}{\partial y}, \quad u_e = u_p, \qquad (6)$$

где u_0, u_e, u_p – перемещения падающей, отраженных и переломленных волн соответственно. Причем $u_e = u_0 + u_p$, тогда находим производные по координате y:

$$u_0 = \frac{\partial\phi_0}{\partial y} = -\frac{B_0}{H} f'\left(\frac{b_0 t}{H} - \frac{y}{H}\right),$$

$$u_e = \frac{\partial\phi_e}{\partial y} = \frac{B_e}{H} f'\left(\frac{b_0 t}{H} + \frac{y}{H}\right),$$

$$u_p = \frac{\partial\phi_p}{\partial y} = -\frac{B_p}{H} f'\left(\frac{b_1 t}{H} - \frac{y}{H}\right). \qquad (7)$$

Компоненты тензора деформации и напряжения в упругом случае выражаются через компоненты перемещений в виде [2, 3]:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y};$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x};$$

$$\sigma_x = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_x;$$

$$\sigma_y = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_y;$$

$$\tau_{xy} = \mu\varepsilon_{xy}. \qquad (8)$$

Исходя из постановки задачи и учитывая (8) имеем:

$$\varepsilon_x = 0; \quad \varepsilon_y = 0; \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u_e}{\partial y};$$

$$\sigma_x = 0; \quad \sigma_y = 0; \quad \tau_{xy} = \mu\varepsilon_{xy}. \qquad (9)$$

Находим выражение для компонентов ε_{xy} и τ_{xy}:

$$\varepsilon_{xy} = \frac{B_e}{H^2} f''\left(\frac{b_0 t}{H} + \frac{y}{H}\right);$$

$$\tau_{xy} = \mu\frac{B_e}{H^2} f''\left(\frac{b_0 t}{H} + \frac{y}{H}\right).$$

Уравнение колебания слоя:

$$\frac{\partial^2 u_e}{\partial t^2} = b_0^2 \frac{\partial^2 u_e}{\partial y^2}. \qquad (10)$$

В работе [2] показано, что уравнение (10) в потенциалах имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \Psi_e}{\partial t^2} = b_0^2 \frac{\partial^2 \Psi_e}{\partial y^2}. \qquad (11)$$

Перепишем граничные и начальные условия задачи в потенциалах:

$$\Psi_e = \Psi_p, \quad \tau_e = \tau_p \text{ при } y = 0;$$

$$\tau = 0 \text{ при } y = H; \qquad (12)$$

$$\tau_e = u_e = 0 \text{ при } t = 0. \qquad (13)$$

Полупространство и слои характеризуются скоростями поперечных волн b_0, b_1, коэффициентами Ляме $\lambda_0, \mu_0, \lambda_1, \mu_1$ и плотностями ρ_0, ρ_1. Нулевой индекс относится к полупространству, а единичный – к слою.

Скорости продольных и поперечных волн выражаются через коэффициенты Ляме и плотностями в следующем виде:

$$a_0 = \sqrt{\frac{\lambda_0 + 2\mu_0}{\rho_0}}, \quad a_1 = \sqrt{\frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{\rho_1}},$$

$$b_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\rho_0}}, \quad b_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\rho_1}}.$$

Можно вычислить коэффициенты отражения продольных и поперечных волн [1]:

$$K_S = \frac{1 - \frac{b_0\rho_0}{b_1\rho_1}}{1 + \frac{b_0\rho_0}{b_1\rho_1}}, \quad K_P = \frac{1 - \frac{a_0\rho_0}{a_1\rho_1}}{1 + \frac{a_0\rho_0}{a_1\rho_1}},$$

где K_S, K_P коэффициенты отражения поперечных и продольных волн.

Задачу (11)-(13) можно решить различными численными методами [4]. Один из методов –

это, конечно, разностный метод, по которому граничные, начальные условия и уравнение движения записываются в конечно-разностной схеме. В результате получим систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Полученная СЛАУ решается методом Гаусса или методом прогонки [5].

Другой метод численного решения задачи (11)-(13) – метод Рунге-Кутта. Метод Рунге-Кутта имеет порядок погрешности вычисления выше, чем остальные численные методы [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Григорян С.С.* Об основных представлениях динамики грунтов // Прикладная математика и механика. 1960. Т. 24, № 6. С. 1057-1072.

2. *Кольский Г.* Волны напряжения в твердом теле. М.: Мир, 1955. 150 с.

3. *Самуль В.И.* Основы теории упругости и пластичности. М.: Высшая школа, 1970. 120 с.

4. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. М.: Наука, 1978. 120 с.

5. *Форсайт Дж., Моллер К.* Численное решение систем линейных алгебраических уравнений. М.: Мир, 1969. 250 с.

Резюме

Топырақ қабатының серпімді тербелісі жайлы есеп қарастырылған. Топырақ қабаты Григорян моделімен сипатталған. Қойылған есепті шешудеу әлеуеттер әдісі қолданылды. Орын ауыстыру, өзгеру және кернеу компоненттерін серпімді күй жағдайда есептеу үшін өрнектер алынды.

Summary

A problem is considered in the article about elastic fluctuation of surface layer of the soil. The layers of the soil were described by Grigoryan model. The method of potentials is used for solution of the task set. The expressions have been obtained to calculate components of a strain and stress in elastic cases.

Международный казахско-турецкий университет им. Х. А. Ясави

Поступила 25.01.2011г.