УДК 517.956.2

У. Р. КУШЕРБАЕВА

НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БЕЛЬТРАМИ С ПОЛЯРНОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Коэффициенты рассматриваемого уравнения имеют полюс первого порядка. В этой точке гауссова кривизна обращается в нуль. В теории бесконечно малых изгибаний поверхностей положительной кривизны с точкой уплощения задача построения изометрически сопряженных координат решается с помощью уравнения Бельтрами. Решены начально-краевые задачи для уравнения Бельтрами с полярной особенностью в неограниченной области.

Пусть $G=\left\{z=re^{i\varphi}:0\le r<\infty,\ 0\le\varphi<2\pi\right\}$, $\nu>1$ – действительное число, $\mu=\dfrac{\nu}{1-\beta}>1$, $k=[\mu]$. Здесь $[a]$ – целая часть a. Рассмотрим в G уравнение Бельтрами с сингулярной точкой

$$\partial_{\bar z}V-\beta e^{2i\varphi}\partial_z V+\frac{a(\varphi)}{2\bar z}V+\frac{b(\varphi)}{2\bar z}\overline{V}=0,\quad (1)$$

где $\partial_{\bar z}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}+i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$, $\partial_z=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}-i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$, $a(\varphi)$, $b(\varphi)\in C[0,2\pi]$, $a(\varphi+2\pi)=a(\varphi)$,

$b(\varphi+2\pi)=b(\varphi),\ 0\le\beta<1.$

Задача А. Требуется найти решение уравнения (1) из класса $C^1(G)$, удовлетворяющее условиям:

$$\frac{\partial^n V}{\partial r^n}(0,\varphi)=0,\quad \left(n=\overline{1,k-1}\right), \tag{2}$$

$$|V(r,\varphi)|=O(r^k),\quad r\to\infty \tag{3}$$

и граничному условию

$$\operatorname{Re}V(r,0)=\operatorname{Re}V(r,2\pi)=b_1r^\mu,\ \ 0\le r<\infty, \tag{4}$$

где b_1 – действительное число.

Задача В. Требуется найти решение уравнения (1) из класса $C^1(G)$, удовлетворяющее условиям (2), (3) и граничному условию

$$\operatorname{Im}V(r,0)=\operatorname{Im}V(r,2\pi)=b_2r^\mu\ ,\ 0\le r<\infty,$$

где b_2 – действительное число.

Решения задач. В [3] получено решение уравнения (1) из класса $C^1(G)$ в виде

$$V(r,\varphi)=r^\mu\left(\bar{c}P_{\nu,1}(\varphi)+cP_{\nu,2}(\varphi)\right)\times$$
$$\times\exp\left(\frac{i}{1+\beta}\left(\nu\varphi+B(\varphi)\right)\right), \tag{5}$$

где

$$P_{\nu,1}(\varphi)=\sum_{k=1}^{\infty}I_{\nu,2k-1}(\varphi),\ P_{\nu,2}(\varphi)=1+\sum_{k=1}^{\infty}I_{\nu,2k}(\varphi),$$

$$I_{\nu,k}(\varphi)=\int_0^\varphi A_\nu(\gamma)\overline{I_{\nu,k-1}(\gamma)}d\gamma,\quad \left(k=\overline{2,\infty}\right),$$

$$I_{\nu,1}(\varphi)=\int_0^\varphi A_\nu(\gamma)d\gamma,$$

$$A_\nu(\varphi)=\frac{i}{1+\beta}b(\varphi)\exp\left(-\frac{2i}{1+\beta}\left(\nu\varphi+\operatorname{Re}B(\varphi)\right)\right),$$

$$B(\varphi)=\int_0^\varphi a(\gamma)d\gamma,$$

$$c=\begin{cases}\alpha,\ \text{ если }\ \Delta_1(\nu)=\Delta_2(\nu)=0,\\ \Delta_1(\nu)\cdot\alpha-\overline{\Delta_2(\nu)}\cdot\bar{\alpha},\\ \quad\text{если }\ |\Delta_1(\nu)|=|\Delta_2(\nu)|\ne0\end{cases} \tag{6}$$

α – произвольное комплексное число.

Здесь ν – решение уравнения

$$\operatorname{Re}P_{\nu,2}(2\pi)\cos\left(\frac{2\pi}{1+\beta}(\nu+d)\right)-$$
$$-\operatorname{Im}P_{\nu,2}(2\pi)\sin\left(\frac{2\pi}{1+\beta}(\nu+d)\right)=1$$

из отрезка $[k,\ k+1]$,

$$\Delta_1(\nu)=P_{\nu,1}(2\pi),$$

$$\Delta_2(\nu)=P_{\nu,2}(2\pi)-\exp\left(\frac{-2\pi i}{1+\beta}(\nu+d)\right),$$

$$d=\frac{B(2\pi)}{2\pi}.$$

В [3] доказано, что для любого целого числа k всегда существует число $\nu\in[k,k+1]$, такое, что

$$|\Delta_1(\nu)|=|\Delta_2(\nu)|. \tag{7}$$

Поэтому для такого ν функция $V(r,\varphi)$, определенная по формуле (5), является решением уравнения (1) из класса $C^1(G)$, удовлетворяющим условиям (2), (3) и $V(r,0)=V(r,2\pi)$.

Рассмотрим задачу А. Произвольное комплексное число α из (6) выберем так, чтобы имело место равенство (4). Для этого, подставляя (4) в (5), получим

$$\operatorname{Re}c=b_1\ \text{ при }\ \Delta_1(\nu)=\Delta_2(\nu)=0\ \text{ и}$$
$$\operatorname{Re}\left(\Delta_1(\nu)\alpha-\overline{\Delta_2(\nu)}\cdot\bar{\alpha}\right)=b_1$$

при $|\Delta_1(\nu)|=|\Delta_2(\nu)|,\ \Delta_1(\nu)\ne0.$

Найденное отсюда число α подставим в (6):

$$c=\begin{cases}b_1+i\beta,\\ \text{если }\ \Delta_1(\nu)=\Delta_2(\nu)=0,\\ \dfrac{b_1\left(\Delta_1(\nu)-\Delta_2(\nu)\right)}{\operatorname{Re}\left(\Delta_1(\nu)-\Delta_2(\nu)\right)},\\ \text{если }\ \operatorname{Re}\Delta_1(\nu)\ne\operatorname{Re}\Delta_2(\nu),\ \ \Delta_1(\nu)\ne0,\\ \dfrac{-b_1\left(\Delta_1(\nu)+\Delta_2(\nu)\right)i}{\operatorname{Im}\left(\Delta_1(\varphi)+\Delta_2(\varphi)\right)},\\ \text{если }\ \operatorname{Im}\Delta_1(\nu)\ne-\operatorname{Im}\Delta_2(\nu),\ \ \Delta_1(\nu)\ne0,\\ 2\operatorname{Im}\left(\alpha\ \Delta_1(\nu)\right)i,\\ \text{если }\ \Delta_1(\nu)=\overline{\Delta_2(\nu)},\ \ \Delta_1(\nu)\ne0\ \ и\ \ b_1=0.\end{cases} \tag{8}$$

Здесь α – произвольное комплексное, β – произвольное действительное числа.

Таким образом, имеет место теорема:

Теорема 1. При $\Delta_1(\nu) \neq \overline{\Delta_2(\nu)}$ задача А имеет единственное решение, при $\Delta_1(\nu) = \Delta_2(\nu) = 0$ задача А имеет бесконечно множество решений, при $\Delta_1(\nu) = \overline{\Delta_2(\nu)}$, $\Delta_1(\nu) \neq 0$, задача А имеет решение только при $b_1 = 0$. Здесь ν из отрезка $[k,k+1]$ удовлетворяет условию (7). Эти решения находятся по формулам (5), (8).

Аналогично, решая задачу В, получим решение в виде (5), где ν из отрезка $[k,k+1]$ удовлетворяет условию (7),

$$c = \begin{cases} \lambda + ib_2, \\ \text{если } \Delta_1(\nu) = \Delta_2(\nu) = 0, \\ \dfrac{b_2\left(\Delta_1(\nu) - \Delta_2(\nu)\right)}{\operatorname{Im}\left(\Delta_1(\nu) - \Delta_2(\nu)\right)}, \\ \text{если } \operatorname{Im}\Delta_1(\nu) \neq \operatorname{Im}\Delta_2(\nu), \ \Delta_1(\nu) \neq 0, \\ \dfrac{ib_2\left(\Delta_1(\nu) + \Delta_2(\nu)\right)i}{\operatorname{Re}\left(\Delta_1(\varphi) + \Delta_2(\varphi)\right)}, \\ \text{если } \operatorname{Re}\Delta_1(\nu) \neq -\operatorname{Re}\Delta_2(\nu), \ \Delta_1(\nu) \neq 0, \\ 2\operatorname{Re}\left(\alpha \cdot \Delta_1(\nu)\right), \\ \text{если } \Delta_1(\nu) = \overline{\Delta_2(\nu)}, \ \Delta_1(\nu) \neq 0 \ \text{и} \ b_2 = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Здесь α – произвольное комплексное, λ – произвольное действительное числа.

Следовательно, имеет место

Теорема 2. При $\Delta_1(\nu) \neq -\overline{\Delta_2(\nu)}$ задача В имеет единственное решение, которое находится по формулам (5), (9), где ν – решение уравнения (7) из отрезка $[k,k+1]$. При $\Delta_1(\nu) = \Delta_2(\nu) = 0$ задача В имеет бесконечно множество решений, которые находятся по формулам (5), (9). При $\Delta_1(\nu) = -\overline{\Delta_2(\nu)}$, $\Delta_1(\nu) \neq 0$, где ν – решение уравнения (7), задача В имеет решение только при $b_2 = 0$. В этом случае решение ее может быть найдено по формулам (5), (9).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Усманов З.Д.* Бесконечно малые изгибания поверхностей положительной кривизны с точкой уплощения // Differential Geometry. Banach Center Publications. Warsaw, 1984. V. 12. P. 241-272.

2. *Тунгатаров А.Б.* Об одном способе построения непрерывных решений уравнения Карлемана-Векуа с сингулярной точкой // Дифференциальные уравнения. 1992. Т. 28, 8. С. 1427-1434.

3. *Кушербаева У.Р.* Об одном классе уравнений Карлемана-Векуа с полярной особенностью. // Вестник КазГУ. Сер. математика, механика, информатика. 1999. № 3. С. 3-7.

Резюме

Қарастырып отырған теңдеудің коэффициенттерінің координаталар бас нүктесінде бірінші ретті полюстері бар. Осы нүктеде Гаусс қисықтығы нөлге тең. Тығыздық нүктесі бар қисықтығы оң шексіз аз иілетін беттер теориясында изометриялы түйіндес координаттарды табу есебі Бельтрами теңдеуінің көмегімен шешіледі. Бұл жұмыста шексіз облыста полярлық ерекшелігі бар Бельтрами теңдеуі үшін қойылған бастапқы-шекаралық есептердің үзіліссіз шешімдері табылған.

Summary

The reason of it is that there is an extreme restriction of the application of that is Gause curvature should be strictly positive. On the other hand search for isometrically connected coordinates on the surface of positive curvature with the point of condencation brings to the proof of the solution of Beltrami equation. The existence of solution of initial- regional problems for Beltrami equation with singular point in unlimited area with a section is proved.

Алматинский университет энергетики и связи

Поступила 28.09.10г.