УДК 517.946

Ш. Н. КУТТЫКОЖАЕВА

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА С КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЯ ДЛЯ МОДИФИЦИРОВАННЫХ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА

(Представлена академиком НАН РК Б. Т. Жумагуловым)

Рассматривается аппроксимация с малым параметром ε начально-краевой задачи с краевым условием проскальзывания для модифицированных уравнений Навье-Стокса. Доказываются теоремы существования и сходимости сильных решений вспомогательной задачи.

В работе [1] изучена разрешимость в ограниченной области $\Omega \subset R^3$ с гладкой границей $\partial\Omega$ начально-краевой задачи с краевым условием проскальзывания (условием свободной поверхности) для модифицированных уравнений Навье-Стокса.

$$\mathrm{v}_t - \left(\nu_0 + \nu_1 \|\mathrm{v}_x\|^2_{L_2(\Omega)}\right)\Delta \mathrm{v} + (\mathrm{v}\cdot\nabla)\mathrm{v} + \nabla p = f,$$
$$div\mathrm{v} = \nabla\cdot\mathrm{v} = 0, \quad \nu_0, \nu_1 > 0, \tag{1}$$

$$\mathrm{v}\cdot n\big|_S = 0, \ (\mathrm{rot}\,\mathrm{v}\times n)\big|_S = 0, \quad t\in(0,\mathrm{T}),$$
$$\mathrm{v}\big|_{t=0} = \mathrm{v}_0(x). \tag{2}$$

Для любых $\mathrm{v}\in \mathrm{W}_2^s(\Omega), s = 2,3,\ldots,$ удовлетворяющих краевому условию (2) в случае $\Omega\subset R^3$, или его аналогу

$$\mathrm{v}\cdot n\big|_S = \mathrm{v}_n\big|_S = 0, \ \ \mathrm{rot}\,\mathrm{v}\big|_S = \left(\frac{\partial \mathrm{v}_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \mathrm{v}_1}{\partial x_2}\right)\Bigg|_S = 0$$

в случае $\Omega\subset R^2$,

справедлива формула Грина:

$$(-\Delta\mathrm{v},\omega)_\Omega = -(graddiv\mathrm{v},\omega)_\Omega + (rotrot\mathrm{v},\omega)_\Omega =$$
$$= -\int_S div\mathrm{v}\cdot\omega_{\mathrm{n}}ds + (div\mathrm{v},\mathrm{div}\omega)_\Omega +$$
$$+\int_S \omega(rot\mathrm{v}\times n)ds + (rot\mathrm{v},\mathrm{rot}\omega)_\Omega =$$
$$= (div\mathrm{v},\mathrm{div}\omega)_\Omega + (rot\mathrm{v},\mathrm{rot}\omega)_\Omega, \tag{3}$$

$$(grad\ div\mathrm{v},\Delta\omega)_\Omega = (grad\ div\mathrm{v}, grad\ div\omega)_\Omega -$$
$$-\int_S grad\ div\mathrm{v}(\mathrm{rot}\omega\times n)ds - \tag{4}$$
$$-(rot\ grad\ div\mathrm{v},\mathrm{rot}\omega)_\Omega = (grad\ div\mathrm{v}, graddiv\omega)_\Omega,$$

если $\Omega\subset R^3$, и

$$(-\Delta\mathrm{v},\omega)_\Omega = (div\mathrm{v},div\omega)_\Omega + (rot(rot\mathrm{v}),\omega)_\Omega =$$
$$= (div\mathrm{v},div\omega)_\Omega + \int_S rot\mathrm{v}(\omega\times n)ds + (rot\mathrm{v},rot\omega)_\Omega,$$

$$(grad\ div\mathrm{v},\Delta\omega)_\Omega = (grad\ div\mathrm{v}, grad\ div\omega)_\Omega -$$
$$-\int_S rot\omega(grad\ div\mathrm{v}\times n)ds - \tag{5}$$
$$-(rot\ grad\ div\mathrm{v},rot\omega)_\Omega = (grad\ div\mathrm{v},grad\ div\omega)_\Omega$$

если $\Omega\subset R^2$.

Далее рассмотрим ε-аппроксимацию уравнений (1)-(2):

$$\mathrm{v}_t^\varepsilon - (\nu_0 + \mathrm{v}_1\|\mathrm{v}_x^\varepsilon\|_2^2)\Delta\mathrm{v}^\varepsilon + (\mathrm{v}^\varepsilon\cdot\nabla)\mathrm{v}^\varepsilon -$$
$$-\frac{1}{\varepsilon}\nabla div\mathrm{v}^\varepsilon + \frac{1}{2}\mathrm{v}^\varepsilon div\mathrm{v}^\varepsilon = f, \tag{6}$$

$$\mathrm{v}^\varepsilon\big|_{t=0} = \mathrm{v}_0(x), \ \mathrm{v}^\varepsilon\cdot n\big|_S = 0, \ \left(rot\mathrm{v}^\varepsilon\times n\right)_S = 0. \tag{7}$$

Определение 1. Функция $\mathrm{v}^\varepsilon(x,t)$ называется сильным решением задачи (6)-(7), если она суммируема со всеми производными, входящими в уравнение (6) и удовлетворяет уравнению (6) и начально-краевым условиям (7) почти всюду в соответствующей мере.

Теорема 1. Пусть $\Omega\subset R^3$, $S\in C^2$, $\mathrm{v}_0(x)\in J_n^2(\Omega)$, f, $f_t\in L_2(0,T,L_2(\Omega))$. Тогда начально-краевая задача (6)-(7) имеет единственное сильное решение и для решения справедливы оценки

$$\|\mathrm{v}_x^\varepsilon\|_{L_\infty(0,T,L_2(\Omega))} + \frac{1}{\varepsilon}\|grad\ div\mathrm{v}^\varepsilon\|^2_{L_\infty(0,T,L_2(\Omega))} +$$
$$+\int_0^T \|\mathrm{v}^\varepsilon\|_{W_2^2(\Omega)}dt \le C < \infty, \tag{8}$$

$$\left\|v_t^\varepsilon\right\|_{L_\infty(0,T,L_2(\Omega))}+\left\|v_{tx}^\varepsilon\right\|_{L_2(0,T,L_2(\Omega))}<C<\infty .$$

Доказательство. Вывод априорных оценок. Умножим (6) на v^ε скалярно в $L_2(\Omega)$ используя формулу Грина, неравенства Гельдера и Юнга, мы получим равенство:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|v^\varepsilon\right\|^2+\left(\nu_0+v_1\left\|v_x^\varepsilon\right\|^2\right)\left(\left\|rotv^\varepsilon\right\|^2+\left\|divv^\varepsilon\right\|^2\right)+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\left\|divv^\varepsilon\right\|^2=\left(f,v^\varepsilon\right)\le\left\|f\right\|\cdot\left\|v^\varepsilon\right\|\le\delta\left\|v_x^\varepsilon\right\|^2+C_\delta\left\|f\right\|^2.$$

Последнее неравенство интегрируем по t и при малом δ получим:

$$\left\|v^\varepsilon\right\|^2_{L_\infty(0,T,L_2(\Omega))}+\int_0^T\left(\nu_0+v_1\left\|v_x^\varepsilon\right\|^2\right)\times$$

$$\times\left(\left\|rotv^\varepsilon\right\|^2+\left\|divv^\varepsilon\right\|^2\right)dt+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\left\|divv^\varepsilon\right\|^2_{L_2(0,T;L_2(\Omega))}\le C<\infty. \qquad (9)$$

Далее умножим (6) на Δv^ε скалярно в $L_2(\Omega)$ используя формулу Грина, имеем:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|rotv^\varepsilon\right\|^2+\left(\nu_0+v_1\left\|v_x^\varepsilon\right\|^2\right)\left\|\Delta v^\varepsilon\right\|^2=$$

$$=\left(f,\Delta v^\varepsilon\right)_\Omega+\int_\Omega\left((v^\varepsilon\cdot\nabla)v^\varepsilon+\frac{1}{2}v^\varepsilon divv^\varepsilon\right)\Delta v^\varepsilon dx-$$

$$-\frac{1}{\varepsilon}\left\|grad\ divv^\varepsilon\right\|^2, \qquad (10)$$

Оцениваем правую часть (10) по неравенству вложения [2]:

$$\left(f,\Delta v^\varepsilon\right)_\Omega\le\left\|f\right\|\cdot\left\|\Delta v^\varepsilon\right\|\le\delta_1\left\|\Delta v^\varepsilon\right\|^2+C_\delta\left\|f\right\|^2,$$

$$\left|\int_\Omega(v^\varepsilon\cdot\nabla)v^\varepsilon\Delta v^\varepsilon dx\right|\le\max_\Omega\left|v^\varepsilon\right|\cdot\left\|\Delta v^\varepsilon\right\|\cdot\left\|v_x^\varepsilon\right\|\le$$

$$\le C\left\|\Delta v^\varepsilon\right\|^{1/2}\left\|v_x^\varepsilon\right\|\cdot\left\|\Delta v^\varepsilon\right\|\le\delta_2\left\|v_x^\varepsilon\right\|^2\left\|\Delta v^\varepsilon\right\|^4+C\left\|\Delta v^\varepsilon\right\|\le$$

$$\le\delta_2\left\|v_x^\varepsilon\right\|^2\left\|\Delta v^\varepsilon\right\|^2+\delta_3\left\|\Delta v^\varepsilon\right\|^2+C.$$

Теперь возьмем $\delta_2+\delta_4<\nu_1$, $\delta_1+\delta_3+\delta_5<\nu_0$ и интегрируя (10) по t, имеем:

$$\left\|v_x^\varepsilon\right\|^2_{L_\infty(0,T,L_2(\Omega))}+\int_0^T\left(\nu_0+v_1\left\|v_x^\varepsilon\right\|^2\right)\left\|\Delta v^\varepsilon\right\|^2dt+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\left\|\nabla divv^\varepsilon\right\|^2_{L_2(0,T;L_2(\Omega))}\le C\left(\left\|v_{0x}^\varepsilon\right\|^2+\int_0^T\left\|f\right\|^2dt\right). \qquad (11)$$

Далее дифференцируем (6) по t, умножим скалярно на v_t^ε и в результате получим:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|v_t^\varepsilon\right\|^2+\int_0^T\left(\nu_0+v_1\left\|v_x^\varepsilon\right\|^2\right)\left(\left\|rotv_t^\varepsilon\right\|^2+\left\|divv_t^\varepsilon\right\|^2\right)dt+$$

$$+\frac{\nu_1}{2}\left[\frac{d}{dt}\left\|v_x^\varepsilon\right\|^2\right]=\left(f_t,v_t^\varepsilon\right)_\Omega+\left((v_t^\varepsilon\cdot\nabla)v^\varepsilon,v_t^\varepsilon\right)_\Omega+$$

$$+\frac{1}{2}\left(v^\varepsilon divv_t^\varepsilon,v_t^\varepsilon\right)_\Omega-\frac{1}{\varepsilon}\left\|divv_t^\varepsilon\right\|^2,$$

Оцениваем один из слагаемых по неравенству Гельдера:

$$\left|\left((v_t^\varepsilon\cdot\nabla)v^\varepsilon,v_t^\varepsilon\right)_\Omega\right|\le\left\|v_x^\varepsilon\right\|\cdot\left\|v_t^\varepsilon\right\|^2_{L_4(\Omega)}\le\left\|v_{xt}^\varepsilon\right\|^{3/2}\left\|v_t^\varepsilon\right\|^{1/2}\le$$

$$\le\delta\left(\left\|rotv_t^\varepsilon\right\|^2+\left\|divv_t^\varepsilon\right\|^2\right)+C_\delta\left\|v_t^\varepsilon\right\|^2.$$

Остальные слагаемые оцениваются аналогично. Отсюда следует, что

$$\left\|v_t^\varepsilon\right\|^2_{L_\infty(0,T,L_2(\Omega))}+\int_0^T\left\|v_{tx}^\varepsilon\right\|^2dt\le$$

$$\le C\left(\left\|v_t^\varepsilon(x,0)\right\|^2+\int_0^T\left\|f_t\right\|^2dt\right). \qquad (12)$$

Теперь можно перейти к непосредственному доказательству теоремы. Для этого воспользуемся методом Галеркина. Ищем приближенное решение задачи (6)-(7) в виде: $v_N^\varepsilon(t)=\sum_{j=1}^N\alpha_j(t)\omega_j$,

где ω_j - есть спектральная функция оператора

$$\Delta\omega_j=\lambda_j\omega_j,$$

$$\omega_j\cdot n\big|_S=\omega_{jn}\big|_S=0,\quad rot\omega_j\times n\big|_S=0. \qquad (13)$$

Числовые функций $\alpha_j(t)$ - находятся из следующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\left(v_{Nt}^\varepsilon,\omega_j\right)_\Omega-\left(\left(\nu_0+\nu_1\left\|v_{Nx}^\varepsilon\right\|^2\right)\Delta v_N^\varepsilon,\omega_j\right)_\Omega-$$

$$-\left(\frac{1}{\varepsilon}\nabla divv_N^\varepsilon,\omega_j\right)+\left((v_N^\varepsilon\cdot\nabla)v_N^\varepsilon+\frac{1}{2}v_N^\varepsilon divv_N^\varepsilon,\omega_j\right)_\Omega=$$

$$=\left(f,\omega_j\right)_\Omega,\qquad j=1,2,...N. \qquad (14)$$

$$v_N^\varepsilon\big|_{t=0}=\sum_{j=1}^N\left(v_0^\varepsilon\cdot\omega_j\right)\omega_j. \qquad (15)$$

Разрешимость задачи (14)-(15) следует из общей теории обыкновенных дифференциальных уравнений [3]. Рассуждая так же, как при получении априорных оценок и учитывая (13), для v_N^ε можно получить следующие априорные оценки, равномерные по ε:

$$\left\|v_{Nt}^\varepsilon\right\|^2_{L_\infty(0,T,L_2(\Omega))} + \int_0^T \left\|v_{Ntx}^\varepsilon\right\|^2 dt + \left\|v_{Nx}^\varepsilon\right\|^2_{L_\infty(0,T,L_2(\Omega))} \le C < \infty. \qquad (16)$$

$$\left\|v_N^\varepsilon\right\|^2_{L_\infty(0,T,W_2^2(\Omega))} + \frac{1}{\varepsilon}\left\|div v_{Nt}^\varepsilon\right\|^2_{L_2(0,T,L_2(\Omega))} + \frac{1}{\varepsilon}\left\|div v_N^\varepsilon\right\|^2_{L_2(0,T,L_2(\Omega))} \le C < \infty. \qquad (17)$$

Из (16) и (17) по теореме вложения следует, что из последовательности v_N^ε можно выделить подпоследовательность, для которого имеют место соотношения

$$v_N^\varepsilon(t) \to v^\varepsilon(t) \text{ слабо в } L_2\left(0,T;W_2^2(\Omega)\right),$$

$$v_{Nt}^\varepsilon(t) \to v_t^\varepsilon(t) \text{ слабо в } L_2\left(0,T;L_2(\Omega)\right),$$

$$v_N^\varepsilon(t) \to v^\varepsilon(t) \text{ сильно в } L_2\left(0,T;W_2^1(\Omega)\right),$$

при $N \to \infty$.

Далее, переходя к пределу в интегральном тождестве (14) заметим, что $v^\varepsilon(t)$ - является сильным решением задачи (6)-(7). Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Пусть выполнены все условия теоремы 1. Тогда решение задачи (6)-(7) сходится к решению задачи (1)-(2) при $\varepsilon \to 0$.

Доказательство. В силу априорных оценок, равномерных по ε, следует, что

$$v^\varepsilon(t) \to v(t) \text{ слабо в } L_2\left(0,T;W_2^2(\Omega)\right),$$

$$v^\varepsilon(t) \to v(t) \text{ слабо в } L_2\left(0,T;W_2^1(\Omega)\right),$$

$$v_t^\varepsilon(t) \to v_t(t) \text{ слабо в } L_2\left(0,T;L_2(\Omega)\right),$$

при $\varepsilon \to 0$.

Переходя к пределу в (6)-(7) при $\varepsilon \to 0$, заметим, что $v(t)$ - является решением задачи (1)-(2). Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Осколков А.П.* Начально-краевые задачи с краевым условием проскальзывания для модифицированных уравнений Навье-Стокса // Записка научных семинаров ЛоМИ. 1994. Т. 213. С. 56-62.

2. *Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н.* Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск: Наука, 1983. 318 с.

3. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1982. 152 с.

Резюме

Жетілдірілген Навье-Стокс теңдеулерінің шекаралық сырғанау шарты бар бастапқы-шеттік есебінің ε кіші параметр бойынша аппроксимациясы қарастырылды. Көмекші есептің күшті шешімінің бар болуы мен жинақталу теоремалары дәлелденген.

Summary

In this work approximation with small parameter ε of an initial regional task with a regional condition of sliding for modified equations Navier-Stokes is examined. Theorems of existence and convergence of strong decisions of an auxiliary task are proved.

Кокшетауский университет *Поступила 10.08.08г.*