УДК 517.958

Ш. Н. КУТТЫКОЖАЕВА

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ НЕЛИНЕЙНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ МОДЕЛИ ОКЕАНА

Исследуется сходимость разностных схем для нелинейной модели океана. Дается обоснование сходимости итерационного метода по физическим факторам.

1. Сходимость разностных схем для нелинейной модели океана. Рассмотрим краевую задачу нелинейной модели океана в области Ω

$$(\vec{v}\nabla)v = \mu_0 \frac{\partial^2 v}{\partial x_3^2} + \mu\Delta v - \hat{\nabla}P - l \times v + f, \qquad (1)$$

$$div\vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x_3} = -\rho g, \quad v = (v_1, v_2), \quad \vec{v} = (v_1, v_2, v_3), \qquad (3)$$

$$v\big|_S = 0, \quad v_3\big|_{x_3=0} = v_3\big|_{x_3=1} = 0. \qquad (4)$$

Здесь для простоты предполагаем, что Ω – куб. Для построения разностных схем слагаемые переноса переписываем в виде [1]:

$$\mathrm{M}(\vec{v}, v) = (\vec{v}\nabla)v = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{3}\left(v_\alpha \frac{\partial v}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(v_\alpha v)\right). \qquad (5)$$

Аппроксимируем (1)–(4) в области Ω_h:

$$\mathrm{M}(\vec{u}, u) = \mu_0 u_{x_3\bar{x}_3} + \mu\Delta_h u - \hat{\nabla}_h Q - l \times u + f_h, \qquad (6)$$

$$div_h\vec{u} = \sum_{j=1}^{3} u_{j\bar{x}_j} = 0, \qquad (7)$$

$$Q_{x_3} = -\rho g. \qquad (8)$$

Величина $\mathrm{M}(\vec{u}, u)$ равна любому из трех выражений

$$\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{3}\left[u_\alpha u_{\bar{x}_\alpha} + (u_\alpha u)_{x_\alpha}\right],$$

$$\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{3}\left[u_\alpha u_{x_\alpha} + (u_\alpha u)_{\bar{x}_\alpha}\right],$$

$$\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{3}\left[u_\alpha u_{\overset{0}{x}_\alpha} + (u_\alpha u)_{\overset{0}{x}_\alpha}\right],$$

где $u_{0\,x_\alpha} = \dfrac{u_{x_\alpha} + u_{\bar{x}_\alpha}}{2}$. Легко заметить, что справедливо равенство

$$\left(\mathrm{M}(\bar{v}, v), v\right) = 0. \qquad (9)$$

Схемы (6)–(8) решаются с граничными условиями

$$u\big|_{S_h} = 0, \quad u_3\big|_{x_3=0} = u_3\big|_{x_3=1} = 0. \qquad (10)$$

Лемма 1. *Если* $\|f_h\|_{(-1)} \le C < \infty$, *то разностная схема (6)–(8), (10) имеет хотя бы одно решение и для решения имеет место оценка*

$$\|u\|_1 \le C\left(\|f_h\|_{(-1)} + \|\rho g\|\right) \qquad (11)$$

Доказательство. Умножаем (6) на v, (8) на v_3 и суммируем по сеткам Ω_4, используя (7), (9), получаем

$$\|u\|_1^2 = (\rho g, u_3) + (f_h, v). \qquad (12)$$

Правую часть (12) оцениваем по неравенству Гельдера

$$|(\rho g, u_3)| \le \|\rho g\| \|v\|_1, \quad |(f_h, u)| \le \|f_h\|_{(-1)} \|u\|_1.$$

Отсюда легко получить оценку (11). Из теоремы Брауэра следует существование хотя бы одного решения задачи (6)–(8), (10). Лемма 1 доказана.

Теорема 1. *Пусть решение задачи (1)–(4) достаточно гладкое и* $\|f_h\|$ *достаточно мало. Тогда решение задачи (6)–(8), (10) сходится к решению задачи (1)–(4) и имеет место оценка*

$$\|u - v\|^2 \le Ch.$$

В силу (6)–(8), (10) для $\omega = u - v$, $\pi = Q - P$, $\vec{\omega} = \vec{u} - \vec{v}$ получим уравнение

$$\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{3}\left[u_\alpha \omega_{\bar{x}_\alpha} + (u_\alpha \omega)_{x_\alpha}\right] + \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{3}\left[(\omega_\alpha v_{\bar{x}_\alpha} + (\omega_\alpha v)_{x_\alpha}\right] =$$

$$= \mu_0 \omega_{\bar{x}_\alpha x_3} + \mu \Delta_h \omega - l \times \omega - \hat{\nabla}\pi + r_h, \qquad (13)$$

$$\sum_{\alpha=1}^{3} \omega_{\alpha \bar{x}_\alpha} = r_{0h}, \ \pi_{x_3} = r_{3h}, \ \vec{r}_h = (r_{1h}, r_{2h}, r_{3h}), \qquad (14)$$

$$\omega\big|_{S_h} = 0, \quad \omega_3\big|_{x_3=0} = \omega_3\big|_{x_3=1} = 0, \qquad (15)$$

где $r_{1h}, r_{2h}, r_{3h}, r_{0h}$ – невязка $0(h)$.

Умножаем (13) на ω, суммируем по области Ω_h, учитывая тождество $\sum_{\alpha=1}^{3}\left(\left[u_\alpha \omega_{\bar{x}_\alpha} + (u_\alpha \omega)_{x_\alpha}\right], \omega_\alpha\right) = 0$, имеем

$$\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{3}\left(\omega_\alpha v_{\bar{x}_\alpha} + (u_\alpha \omega)_{x_\alpha}, \omega\right) + \mu\|\omega\|_1^2 = (\pi, r_{0h}) + (\vec{r}_h, \omega). \qquad (16)$$

Оцениваем левые части (16)

$$\left|\sum_{\alpha=1}^{3}(\omega_\alpha v_{\bar{x}_\alpha}, \omega)\right| \le C\|v_{\bar{x}_\alpha}\|_{L_4(\Omega_h)} \|\omega\|_1 \|\omega\|_{L_4(\Omega_h)} \le$$

$$\le C\|v_{\bar{x}_\alpha}\|_{L_4(\Omega_h)} \|\omega\|_1^2, \qquad (17)$$

$$\left((\omega_\alpha, v)_{x_\alpha}, \omega\right) \le C\|v_{\bar{x}_\alpha}\|_{L_4(\Omega_h)} \|\omega\|_1^2.$$

Из (13) и (14) оцениваем $\nabla_h \pi$ в негативной норме, учитывая неравенство (24)

$$\aleph^0 \|\pi\| \le C\left(\sup_{\|\varphi\|_1=1} \sum_{\alpha=1}^{3}\left[u_\alpha \omega_{\bar{x}_\alpha} + (u_\alpha, \omega)_{x_\alpha} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \omega_\alpha v_{\bar{x}_\alpha} + (\omega_\alpha v)_{x_\alpha}, \varphi\right]\right) + \|\omega\|_1. \qquad (18)$$

Оцениваем правую часть (18)

$$\sup_{\|\varphi\|_1=1}\left|\left(\sum_{\alpha=1}^{3}(u_\alpha \omega_{\bar{x}_\alpha}, \varphi\right)\right| = \sup_{\|\varphi\|_1=1}\left|\left(\sum_{\alpha=1}^{3}(u_\alpha \omega, \varphi_{\bar{x}_\alpha}\right)\right| \le$$

$$\le C_2\left\|\sum u_\alpha\right\|_{L_4(\Omega_h)} \|\omega\|_{L_4(\Omega_h)} = J_0.$$

Теперь, используя известную оценку теоремы вложения [2], имеем

$$\left\|\sum_{\alpha=1}^{3} u_\alpha\right\|_{L_4(\Omega_h)} \le \frac{C_3}{\sqrt{h}}\|u\|_1.$$

Отсюда J_0 оценивается величиной сверху

$$J_0 = C_4 \frac{1}{\sqrt{h}}\|\omega\|_1 \|u\|_1. \qquad (19)$$

Аналогично оцениваются и слагаемые

$$\sup_{\|\varphi\|=1}\left|\left(\sum_{\alpha=1}^{3}(u_\alpha, \omega)_{x_\alpha}, \varphi\right)\right| \le C_5 \frac{1}{\sqrt{h}}\|\omega\|_1 \|u\|_1, \qquad (20)$$

$$\sup_{\|\varphi\|_1=1}\left|\left(\omega_\alpha v_{\bar{x}_\alpha} + (\omega_\alpha v)_{x_\alpha}, \varphi\right)\right| \le C_6 \|v\|_{L_4(\Omega_h)} \|\omega\|_1.$$

Используя (19), (20), выводим оценку

$$|(\pi, r_{0h})| \le C_7\left(\|\omega\|_1 (1 + \frac{1}{\sqrt{h}}\|u\|_1 + \|v\|_{L_4(\Omega_h)}\right)\|r_{0h}\| \le$$

$$\le \delta\|\omega\|_1^2 + \frac{C_\delta}{h}\|r_{0h}\|^2. \qquad (21)$$

Собирая оценки (16)–(21) и предполагая, что $\|v_x\|_{L_4(\Omega_h)}$ достаточно мало, при малом δ выводим оценку $\|v-u\|_1^2 \le Ch$. Теорема 1 полностью доказана.

2. Итерационный метод по физическим факторам. Для того чтобы решить схему (6)–(8), (10) итерационным методом, записываем ее в другой эквивалентной форме

$$\mathrm{M}_h(\vec{u},u) = \mu_0 u_{x_3\bar{x}_3} + \mu\Delta_h u - l\times u - \hat{\nabla}_h\xi + \tilde{f}_h, \quad (22)$$

$$\sum_{k=0}^{N}\sum_{\alpha=1}^{2} u_{\alpha\bar{x}_\alpha} h = 0, \quad u_3 = u_{3ijk} = -\sum_{m=0}^{k}\sum_{\alpha=1}^{2} u_{\alpha ijmx_\alpha} h,$$

$$u_\alpha = u_{\alpha ijk}, \quad u\big|_{S_h} = 0, \quad (23)$$

где $\bar{f}_h = f_h + \hat{\nabla}_h \sum_{l=0}^{k} \rho g,\ g = const,\ \rho = \rho(x)$.

Схему (22), (23) реализуем следующим итерационным методом по физическим факторам [3]:

$$\frac{u^{n+1/2}-u^n}{\tau} + \mathrm{M}(\vec{u}^n, u^{n+1/2}) = \mu_0 u^{n+1/2}_{x_3\bar{x}_3} + \mu\Delta_h u^{n+1/2} -$$

$$-l\times u^{n+1/2} - \hat{\nabla}_h\xi^n + \tilde{f}_h, \quad (24)$$

$$\frac{u^{n+1}-u^{n+1/2}}{\tau} - \hat{\nabla}_h(\xi^{n+1}-\xi^n) = 0, \quad (25)$$

$$\sum_{k=0}^{N}\sum_{\alpha=1}^{2} u^{n+1}_{\alpha\bar{x}_\alpha} h = \sum_{k=0}^{N} \hat{div}_h u^{n+1} h = 0, \quad (26)$$

$$u^{n+1/2}\Big|_{S_h} = u^n\Big|_{S_h} = u^{n+1}\Big|_{S_h} = 0,\ u^0 = u_0,\ x\in\bar{\Omega}_h,$$

где M(,) равно любому из трех выражений

$$\mathrm{M}(\vec{u}^n, u^{n+1/2}) = \frac{1}{2}\left[\sum_{\alpha=1}^{3}\left(u^n_\alpha u^{n+1/2}_{x_\alpha} + (u^n_\alpha u^{n+1/2})_{x_\alpha}\right)\right],$$

$$\mathrm{M}(\vec{u}^n, u^{n+1/2}) = \frac{1}{2}\left[\sum_{\alpha=1}^{3}\left(u^n_\alpha u^{n+1/2}_{\bar{x}_\alpha} + (u^n_\alpha u^{n+1/2})_{\bar{x}_\alpha}\right)\right],$$

$$\mathrm{M}(\vec{u}^n, u^{n+1/2}) = \frac{1}{2}\left[\sum_{\alpha=1}^{3}\left(u^n_\alpha u^{n+1/2}_{0\,x_\alpha} + (u^n_\alpha u^{n+1/2})_{0\,x_\alpha}\right)\right].$$

Лемма 2. *Пусть выполнены условия*

$$0 < \beta < \frac{1}{C_5},$$

$$1 - \tau\beta\left[\left(\frac{1}{h^3} + \frac{1}{h^{9/2}}\right)C_8\left(\tau\|\tilde{f}\|^2 + \|\tilde{f}\|^2_{(-1)}\right)C_5\right] \ge \frac{1}{2}.$$

Тогда справедлива оценка $\|u^{n+1}\|^2 + \tau^2\|\hat{\nabla}_h\xi^{n+1}\|^2 \le$ $\le C_9\left(\tau\|\tilde{f}\|^2 + \|\tilde{f}\|^2_{(-1)}\right)$, *где* C_i *– различные положительные постоянные, зависимые от данных задачи (24)–(26).*

Доказательство. Умножаем (24) на $2\tau u^{n+1/2}h^3$, суммируем по точкам Ω_h и, учитывая тождество $\left(\mathrm{M}(\vec{u}^n, u^{n+1/2}\right) = 0$, в результате имеем

$$\|u^{n+1/2}\|^2 - \|u^n\|^2 + 2\tau\|u^{n+1/2}\|_1^2 =$$

$$= \left[\left(\xi^n, \hat{div}u^{n+1/2}\right) + \left(\tilde{f}_h, u^{n+1/2}\right)\right]2\tau. \quad (27)$$

Далее умножаем (25) на $\tau\hat{\nabla}_h(\xi^{n+1}+\xi^n)$ и, суммируя по сеткам Ω_h, получаем

$$\tau^2\left(\|\hat{\nabla}_h\xi^{n+1}\|^2 - \|\hat{\nabla}_h\xi^n\|^2\right) + \tau\left(\hat{div}_h u^{n+1/2}, \xi^n\right) +$$

$$+\tau\left(\hat{div}_h u^{n+1/2}, \xi^{n+1}\right) = 0. \quad (28)$$

Умножаем (5) на $2\tau u^{n+1}$ и $\tau(u^{n+1}+u^{n+1/2})$ и с учетом равенства (26) имеем

$$\|u^{n+1}\|^2 - \|u^{n+1/2}\|^2 + \|u^{n+1}-u^{n+1/2}\|^2 = 0, \quad (29)$$

$$\|u^{n+1}\|^2 - \|u^{n+1/2}\|^2 - \tau(\xi^{n+1}-\xi^n, \hat{div}_h u^{n+1/2}) = 0. \quad (29)'$$

Отсюда из (27)–(29)'' выводим

$$\|u^{n+1}\|^2 - \|u^n\|^2 + \|u^n - u^{n+1/2}\|^2 + \|u^{n+1/2} - u^{n+1}\|^2 + \quad (30)$$

$$+\tau\|u^{n+1/2}\|_1^2 + \tau^2\left(\|\hat{\nabla}_h\xi^{n+1}\|^2 - \|\hat{\nabla}_h\xi^n\|^2\right) \le \|\tilde{f}_h\|^2_{(-1)}\tau.$$

В силу (24) оцениваем $\hat{\nabla}\xi^n$ в $L_2(\Omega_h)$

$$\tau\|\hat{\nabla}_h\xi^n\| \le \|u^{n+1/2} - u^n\| + \tau\|\mathrm{M}(\vec{u}^n, u^{n+1/2})\| +$$

$$+\frac{\tau C_0}{h}\|u^{n+1/2}\|_1 + \tau\|\tilde{f}_h\| + \tau l\|u^{n+1/2}\|, \quad (31)$$

Используя теорему вложения [2], оцениваем второе слагаемое (29)

$$\|u^n u^{n+1/2}_{x_\alpha}\|^2_{L_2(\Omega_h)} \le \|u^n\|^2_{L_4(\Omega_h)}\|u^{n+1/2}_{x_\alpha}\|^2_{L_4(\Omega_h)} \le$$

$$\le C_1\|u^n\|^{1/2}\|u^n_x\|^{3/2}\|u^{n+1/2}\|_1^{1/2} +$$

$$+\left\|\mu u_{x_3\bar{x}_3}^{n+1/2}+\mu_0\Delta_h u^{n+1/2}\right\|^{3/2}\le\frac{C_2\left\|u^n\right\|^2\left\|u^{n+1/2}\right\|_1^2}{h^3},\quad(32)$$

$$\left\|\sum_{k=1}^{N}d\hat{i}v_h u^n u_{x_3}^{n+1/2}\right\|^2\le\left\|u^{n+1/2}\right\|^2_{L_4(\Omega_h)}\left\|\sum_{k=1}^{N}d\hat{i}v_h u^n h\right\|^2_{L_4(\Omega_h)}\le$$

$$\le C_3\frac{1}{h^{3/2}}\left\|u^{n+1/2}\right\|_1\frac{1}{h}\left\|u^n\right\|_1^2\le C_4\frac{1}{h^{9/2}}\left\|u^n\right\|^2\left\|u^{n+1/2}\right\|_1.$$

При этом использовано неравенство

$$\max_{\Omega_h}\left|u^n\right|\le C\left\|u\right\|^{1/4}\left\|\mu_0 u^n_{x_3\bar{x}_3}+\mu\Delta_h u^n\right\|^{3/4},$$

если $\Omega\in R^2$.

Отсюда из (31), (32) имеем

$$\tau^2\left\|\hat{\nabla}_h\xi^n\right\|^2\le 5\left(\left\|u^{n+1/2}-u^n\right\|^2+\tau^2\left\|\mathrm{M}_h^1 u^{n+1/2}\right\|^2+\right.$$

$$\left.+\frac{\tau^2 C_0}{h^2}\left\|u^{n+1/2}\right\|_1^2+\tau^2 l^2\left\|u^{n+1/2}\right\|+\tau\left\|f_h\right\|\right)\le$$

$$\le C_5\left(\left\|u^{n+1/2}-u^n\right\|^2+\tau^2\left(\frac{1}{h^3}\left\|u^n\right\|^2+\frac{1}{h^{9/2}}\left\|u^n\right\|^2\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left\|u^{n+1/2}\right\|_1^2+\tau^2\left\|\tilde{f}_h\right\|^2\right).\qquad(33)$$

Умножаем (33) на β, предполагая $0<\beta<\frac{1}{C_5}$, и будем требовать, чтобы выполнялись неравенства

$$1-C_5\beta\ge\beta_0>0,$$

$$1-\tau\beta\left(\frac{1}{h^3}+\frac{1}{h^{9/2}}\right)\left\|u^n\right\|^2 C_5\ge\frac{1}{2},\qquad(34)$$

и сложив с (30), выбрасывая в левой части положительные слагаемые, имеем

$$\left\|u^{n+1}\right\|^2-\left\|u^n\right\|^2+\frac{1}{2}\tau\left\|u^{n+1/2}\right\|_1^2+\tau^2\left\|\hat{\nabla}_h\xi^{n+1}\right\|^2\le$$

$$\le\tau^2(1-\delta)\left\|\hat{\nabla}_h\xi^n\right\|^2+C_6\left(\tau^2\left\|\tilde{f}_h\right\|^2+\tau\left\|\tilde{f}\right\|^2_{(-1)}\right).\quad(35)$$

С учетом тождества (29), из (35) выводим

$$(1+\frac{1}{2}\tau C_\Omega)\left\|u^{n+1}\right\|^2+\tau^2\left\|\hat{\nabla}_h\xi^{n+1}\right\|^2\le\qquad(36)$$

$$\le\tau^2(1-\beta)\left\|\hat{\nabla}_h\xi^n\right\|^2+C_6\left(\tau^2\left\|\tilde{f}_h\right\|^2+\tau\left\|\tilde{f}\right\|^2_{(-1)}\right)+\left\|u^n\right\|^2.$$

Отсюда из (36) легко получаем оценку

$$\left\|u^{n+1}\right\|^2+\tau^2\left\|\hat{\nabla}_h\xi^{n+1}\right\|^2\le C_7\left(\tau\left\|\tilde{f}_h\right\|^2+\left\|\tilde{f}\right\|^2_{(-1)}\right).$$

Чтобы выполнить условия (34), τ, β должны удовлетворять неравенству

$$1-\tau\beta\left[(\frac{1}{h^3}+\frac{1}{h^{9/2}})C_5C_7\left(\tau\left\|\tilde{f}_h\right\|^2+\left\|\tilde{f}\right\|^2_{(-1)}\right)\right]\ge\frac{1}{2}.$$

Легко можно доказать, что если τ, β удовлетворяют последнему неравенству, то условия (34) всегда выполняются. Итак, лемма 2 доказана.

Имеет место следующая теорема:

Теорема 3. *Пусть выполнены условия*

$$1-\frac{\tau N_7}{h^{9/2}}\left(\left\|u_0-u\right\|^2+\left\|u\right\|^2\right)\beta-N_8\left(\left\|u\right\|_1^2+\left\|u_x\right\|^2_{L_4(\Omega_h)}\right)\ge 0,$$

$1-5\beta-\frac{\tau C_0}{h^2}>0$. *Тогда итерационный метод (24)–(26) сходится со скоростью геометрической прогрессии.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Аддитивные схемы для задач математической физики. М.: Наука, 1999. С. 306.

2. *Карчевский М.М., Ляшко А.Д.* Разностные схемы для нелинейных задач математической физики. Казань, 1976.

3. *Белоцерковский О.М., Гущин В.А., Щенников В.Б.* Метод расщепления и применения к решению задач динамики вязкой несжимаемой жидкости // ЖВМ и МФ. 1975. Т. 15, № 2. С. 177-207.

Резюме

Мұхиттың сызықсыз моделінің айырымдық сұлбаларының жинақтығы зерттеледі. Физикалық факторлар бойынша итерациялық әдістің жинақтылығы дәлелденген.

Summary

In work convergence of computing circuits for nonlinear model of ocean is investigated. The substantiation of convergence of an iterative method under physical factors is given.

Поступила 2.05.06г.