УДК 517.946

Ш. Н. КУТТЫКОЖАЕВА

УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ–СТОКСА В ПЕРЕМЕННЫХ ФУНКЦИЯХ ТОКА И ВИХРЯ СКОРОСТЕЙ

Рассматривается регуляризация с малым параметром нестационарной модели несжимаемой жидкости в переменных функции тока и вихря скоростей. Получено существование и сходимость обобщенного решения приближенной задачи, а также выведены равномерные априорные оценки и оценка скорости сходимости решения.

Рассмотрим уравнения вязкой несжимаемой жидкости в форме Ламба-Громека:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}+\vec{v}\times rot\vec{v}=\mu\cdot\Delta\vec{v}-\nabla Q+\vec{f},\quad div\vec{v}=0, \tag{1}$$

$$\vec{v}\big|_{t=0}=\vec{v}_0(x),\ div\vec{v}_0(x)=0,\ \vec{v}\big|_S=0, \tag{2}$$

где $x=(x_1,x_2,x_3)$, $Q=P+|\vec{v}|^2/2$ - полный напор.

Будем считать, что область $\Omega\subset R^3$ - прямоугольный параллелепипед.

В работах [1], [3] предложены некоторые численные методы решения задач (1)-(2) в переменных «функция тока – вихрь скоростей». В [3] показано эквивалентность двух задач. Рассмотрим задачу (1)-(2) в переменных «функция тока – вихрь скоростей»:

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}+rot(rot\times\omega)=\mu\cdot\Delta\omega-rotf,\ \Delta\psi=-\omega, \tag{3}$$

со следующими начально-краевыми условиями:

$$\omega\big|_{t=0}=\omega_0(x),$$

$$\psi\cdot\tau_1\big|_S=\psi\cdot\tau_2\big|_S=0,\quad (\omega\cdot n)\big|_{x_1=0}=0,$$

$$rot\psi\cdot\tau_1\big|_S=rot\psi\cdot\tau_2\big|_S=0,$$

$$div\psi\big|_S=0. \tag{4}$$

Для ясности продемонстрируем граничное условие (4) в случае прямоугольной области. Пусть часть границы области лежит на оси $x_1=0$. Тогда начально-краевые условия преобразуются следующим образом:

$$\omega\big|_{t=0}=\omega_0(x),$$

$$\psi_2\big|_{x_1=0}=\psi_3\big|_{x_1=0}=0,\ \left.\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}\right|_{x_1=0}=0. \tag{5}$$

$$(\omega\cdot n)\big|_{x_1=0}=\omega_1\big|_{x_1=0}=0, \tag{6}$$

$$\left.\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial x_1}-\frac{\partial\psi_1}{\partial x_2}\right)\right|_{x_1=0}=0,\quad \left.\left(\frac{\partial\psi_3}{\partial x_1}-\frac{\partial\psi_1}{\partial x_3}\right)\right|_{x_1=0}=0.$$

Лемма. Для решения задачи (3),(5),(6) справедлива следующая априорная оценка:

$$\|\nabla\psi^\varepsilon\|^2_{L_\infty(0,T,l_2(\Omega))}+\|\Delta\psi\|^2_{L_2(0,T,l_2(\Omega))}\le C<\infty, \tag{7}$$

где постоянная C зависит только от начальных данных и правых частей.

Система уравнений (3) не является системой Коши-Ковалевской, поэтому непосредственное применение метода дробных шагов затруднительно. Одним из способов решения рассматриваемой задачи - аппроксимация системы уравнений (3) уравнениями эволюционного типа. Тогда исходная система уравнений с малым параметром имеет вид:

$$\frac{\partial\omega^\varepsilon}{\partial t}+rot(rot\psi^\varepsilon\times\omega^\varepsilon)=\mu\cdot\Delta\omega^\varepsilon-rotf,$$

$$\varepsilon\frac{\partial\psi^\varepsilon}{\partial t}=\Delta\psi^\varepsilon+\omega \tag{8}$$

с начально-краевыми условиями:

$$\omega^\varepsilon\big|_{t=0}=\omega_0(x),\quad \psi^\varepsilon\big|_{t=0}=\psi_0(x), \tag{9}$$

$$\psi_2^\varepsilon\big|_{x_1=0}=\psi_3^\varepsilon\big|_{x_1=0}=0,\quad \left.\frac{\partial\psi_1^\varepsilon}{\partial x_1}\right|_{x_1=0}=0,\quad \omega_1^\varepsilon\big|_{x_1=0}=0,$$

$$\left.\left(\frac{\partial\psi_2^\varepsilon}{\partial x_1}-\frac{\partial\psi_1^\varepsilon}{\partial x_2}\right)\right|_{x_1=0}=0,\quad \left.\left(\frac{\partial\psi_3^\varepsilon}{\partial x_1}-\frac{\partial\psi_1^\varepsilon}{\partial x_3}\right)\right|_{x_1=0}=0$$

Определение обобщенного решения задач (8), (9) дается аналогично [4].