УДК 539.3 : 621.01

А.Б. КЫДЫРБЕКУЛЫ, К.К. ЕЛЕМЕСОВ

МОДЕЛЬ КРУЧЕНИЯ ВАЛА ИЗ РЕЗИНОПОБНОГО МАТЕРИАЛА, ЗАДАВАЕМОГО ПОТЕНЦИАЛОМ МУНИ

Моделируются нелинейные крутильные колебания муфты из резиноподобного материала, задаваемого потенциалом Муни. Муфта рассматривается как часть соединяемых ею валов. При допущении конечности упругих деформаций получено уравнение крутильных колебаний муфты .

Резина как конструкционный материал находит широкое применение в технике. В силу своих особенностей резина применяется в муфтах, соединяющих наиболее перегруженные элементы кинематической цепи машин, в целях гашения возникающих в них нежелательных колебаний.

Известно, что высокомолекулярные материалы из разного рода пластмасс и резины характеризуются большим внутренним трением. Установлено, что для наполненных резин величина относительного гистерезиса превышает аналогичную величину для сталей более чем в 100 раз [1], причем гистерезисные явления зависят в основном от температуры и диапазона частот колебаний.

Работа посвящена моделированию динамики муфт из резиноподобного материала. Муфту будем рассматривать как часть соединяемых ею валов.

Резина и подобные ей материалы относятся к физически нелинейным средам, не подчиняющимся закону Гука. Поэтому моделирование изделий из них в рамках линейной теории упругости всегда ограничено – необходимо привлекать общую теорию больших упругих деформаций, включающую физический закон, выражающий основные свойства материала, и математический аппарат для выведения из этого закона отдельных следствий, нужных для решения технических задач. Как правило, таким законом является зависимость между тензором напряжений и тензором деформаций, т.е. упругий потенциал. При его построении авторы большинства работ по физически нелинейной теории упругости руководствовались двумя возможностями. Первая, восходящая от Коши и использующая основное свойство нелинейно-упругого тела – полную восстанавливаемость геометрической формы тела, заключается в представлении тензоров напряжений (их компонент) функциями весьма общего вида от компонент тензора деформаций. Вторая возможность, восходящая от Грина, задает выражение потенциальной энергии $\Phi(\varepsilon_{ij})$, и по этому выражению строят соотношения между компонентами тензоров напряжений и деформаций [2]:

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\varepsilon_{ij}} + \frac{\partial}{\partial\varepsilon_{ji}}\right)W(\varepsilon_{11},\ldots,\varepsilon_{33}). \quad (1)$$

Для решения задач динамического анализа механизмов и машин целесообразнее строить модель в перемещениях, поэтому при моделировании физически нелинейных элементов машин будем руководствоваться подходом Грина.

Как правило, вид упругого потенциала для различных классов резиноподобных материалов определяется экспериментально. В практике имеется достаточное количество упругих потенциалов.

К наиболее известным частным формам упругих потенциалов для несжимаемого тела относятся потенциалы Трелоара, Муни, трехчленной теории, Бидермана и др.

В отличие от работ [3-4], где упругие свойства резиноподобного материала задавались потенциалом Трелоара [5]:

$$W = \frac{1}{2}G(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3), \quad (2)$$

в данной работе используется потенциал Муни, описывающий поведение упругого, несжимаемого, изотропного тела [5]:

$$W = C_1(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) + C_2\left[\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} + \frac{1}{\lambda_3^2} - 3\right]. \quad (3)$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – есть коэффициенты удлинений в трех главных направлениях, G – модуль сдвига, C_1 и

C_2 – константы, величины которых заданы в литературе. В случае набухшего каучука они связаны следующим образом: $C_2/C_1=0{,}1$ [5].

Как видно из соотношений (2) и (3), потенциал Муни является расширением потенциала Трелоара. Последний является частным случаем общей теории Муни, когда одна из констант C_2 исчезает [5].

Следуя методике построения нелинейной модели муфты как части соединяемых ею валов [3-4], перейдем от главных удлинений в формуле (3) к тензору деформаций:

$$W=C_1\left[2\varepsilon_1+2\varepsilon_3+\frac{1}{(1+2\varepsilon_1)(1+2\varepsilon_3)}-1\right]+$$
$$+C_2\left[2\varepsilon_1+2\varepsilon_3+4\varepsilon_1\varepsilon_3+\frac{1}{(1+2\varepsilon_1)}+\frac{1}{(1+2\varepsilon_3)}-2\right] \quad (4)$$

Переход от главных компонент тензора деформаций $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ к компонентам тензора деформаций ε_{ij} в (4) осуществляется через следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1&=\frac{2}{\sqrt{3}}\bar{e}\sin(\bar{\varphi}+\frac{2}{3}\pi)+\frac{1}{3}e,\\ \varepsilon_2&=\frac{2}{\sqrt{3}}\bar{e}\sin\bar{\varphi}+\frac{1}{3}e,\\ \varepsilon_3&=\frac{2}{\sqrt{3}}\bar{e}\sin(\bar{\varphi}+\frac{4}{3}\pi)+\frac{1}{3}e.\end{aligned} \quad (5)$$

где

$$e=\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}+\varepsilon_{zz}=E_1,$$

$$\bar{\varphi}=\frac{1}{3}\arcsin(\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{e_3}{\bar{e}^3}),\quad -\frac{\pi}{6\le}\bar{\varphi}\le\frac{\pi}{6},$$

$$\bar{e}^2=\frac{1}{6}\left[(\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy})^2+(\varepsilon_{yy}-\varepsilon_{zz})^2+\right.$$
$$\left.+(\varepsilon_{zz}-\varepsilon_{xx})^2+\frac{3}{2}(\varepsilon^2{}_{xx}+\varepsilon^2{}_{yy}+\varepsilon^2{}_{zz})\right], \quad (6)$$

$$e_3=-3\begin{bmatrix}\varepsilon_{xx}-\frac{1}{3}E_1 & \frac{1}{2}\varepsilon_{xy} & \frac{1}{2}\varepsilon_{xz}\\ \frac{1}{2}\varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy}-\frac{1}{3}E_1 & \frac{1}{2}\varepsilon_{yz}\\ \frac{1}{2}\varepsilon_{xz} & \frac{1}{2}\varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz}-\frac{1}{3}E_1\end{bmatrix}$$

Для рассматриваемого здесь случая вращения вала круглого сечения при допущении гипотезы плоских сечений получено:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1&=\frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon_{xz}^2+\varepsilon_{yz}^2};\\ \varepsilon_2&=0;\\ \varepsilon_3&=-\frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon_{xz}^2+\varepsilon_{yz}^2}\end{aligned} \quad . \quad (7)$$

Тогда согласно (1), (3), (7) получены компоненты тензора деформации:

$$\tau_{xz}=2C_1\frac{\varepsilon_{xz}}{(1-\varepsilon_{xz}^2-\varepsilon_{yz}^2)^2}+,$$
$$+C_2\left[-2\varepsilon_{xz}+\frac{4\varepsilon_{xz}}{(1-\varepsilon_{xz}^2-\varepsilon_{yz}^2)^2}\right],$$
$$\tau_{yz}=2C_1\frac{\varepsilon_{yz}}{(1-\varepsilon_{xz}^2-\varepsilon_{yz}^2)^2}+ \quad (8)$$
$$+C_2\left[-2\varepsilon_{yz}+\frac{4\varepsilon_{yz}}{(1-\varepsilon_{xz}^2-\varepsilon_{yz}^2)^2}\right].$$

Тогда абсолютная величина вектора напряжений определяется через его составляющие следующим образом:

$$|\sigma|=\sqrt{\tau_{xz}^2+\tau_{yz}^2},$$

$$|\sigma|=\frac{2\sqrt{\varepsilon_{xz}^2+\varepsilon_{yz}^2}}{a}\sqrt{C_1^2+2aC_1C_2\left[2-a^2\right]+C_2^2\left[2-a\right]^2},$$

где $a=(1-\varepsilon_{xz}^2-\varepsilon_{yz}^2)^2$.

Полагая, что отсутствует депланация сечения, и используя известные соотношения между (9) перемещениями и углами поворота сечения при допущении конечности деформаций согласно второй системе упрощений В.В. Новожилова, имеем:

$$\sigma=\frac{Gr\frac{\partial\varphi}{\partial z}\sqrt{\left(1+\frac{1}{4}\varphi^2\right)}}{\left[1-r^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\left(1+\frac{1}{4}\varphi^2\right)\right]^2}\times$$

$$\times\sqrt{C_1^2-4C_2^2+4a(C_1C_2-C_2^2)+a^2(C_2^2-2C_1C_2)}\quad(10)$$

здесь $\partial\varphi/\partial z$ – относительный угол закручивания, r – радиус-вектор элемента сечения. Зависимость напряжений от угла поворота и крутки носит нелинейный характер. В случае $C_2=0$ из формулы (10) следует случай потенциала Трелоара.

После упрощения (10) согласно второй системе упрощений В.В. Новожилова получена зависимость между напряжением и углом поворота сечения:

$$\sigma=G_0r\frac{\partial\varphi}{\partial z}\left(1+\frac{1}{8}\varphi\right),\qquad G_0=2(C_1+C_2).\quad(11)$$

Частным случаем данного соотношения является известная из линейной теории кручения зависимость:

$$\sigma=Gr\frac{\partial\varphi}{\partial z}.\qquad(12)$$

Суммируя момент касательных напряжений сечения относительно оси вала, находится внутренний крутящий момент

$$M_{кр}=\int_F R|\tau|dF,\qquad(13)$$

интенсивность которого

$$\frac{\partial\mathrm{M}_{kp}}{\partial z}=G_0J_p\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+\frac{1}{8}G_0J_p\varphi\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+\frac{1}{4}G_0J_p\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2.(14)$$

Исключая номинальное вращение вала, одинаковое для любого элемента его сечений, построена динамическая модель крутильных колебаний вала из резиноподобного материала, поведение которого задавалось потенциалом Муни:

$$GJ_p\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+\frac{1}{8}G_0J_p\varphi\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+\frac{1}{4}G_0J_p\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2-$$

$$-\rho J_p\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+\xi_1\frac{\partial^3\varphi}{\partial z^2\partial t}-\xi_2\frac{\partial\varphi}{\partial t}=F(z,t).$$

Она является расширением модели крутильных колебаний вала из «нео-Гуковского» материала. Согласно проведенным здесь упрощениям, отличие модели носит количественный характер, что, в приниципе, оправдано концепцией построения самого упругого потенциала Муни.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бидерман В.Л.* Теория механических колебаний. – М.: Высшая школа, 1980. – 408 с.

2. *Гузь А.Н.* Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. – Киев: Наукова думка, 1973. – 270 с.

3. *Хаджиева Л.А.* О моделировании динамики элементов машин из физически нелинейного материала // Перспективы развития транспортной техники: Сб. науч. тр. КазНТУ. – Алматы, 2003. – С. 170-175.

4. *Кыдырбекулы А.Б., Хаджиева Л.А.* О моделировании физически нелинейных сред и сред с начальными напряжениями // Труды Всероссийской школы-семинара по современным проблемам МДТТ. – Новосибирск, 2003. – С. 119-123.

5. *Трелоар Л.* Физика упругости каучука. – М.: ИЛ, 1953. – 240 с.

Резюме

Мунидің потенциалы арқылы анықталатын резеңке тектес материалдан жасалған муфтаның сызықсыз бұралу тербелістері модельденеді. Муфта біліктерді қосу́шы ретінде қарастырылған. Серпімді деформациялардың ақырлығын ескере отырып муфтаның бұралу тербелістерінің тендеуі құрылған.

Summary

Nonlinear twist fluctuations or muff from rubber similar material set in potential of Mooney are modeled. Muff is considered as a part of shaft connected by it. At an assumption of finiteness of elastic deformations, the equation of twist fluctuations of muff is received.

Казахский национальный
университет им. Аль-Фараби,
г. Алматы

Поступила 4.05.2009 г.